

Đề thi chính thức

I: PHẦN CHUNG: (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = f(x) = (x + 2)(x^2 - mx + m^2 - 3)$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 2$
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với trục hoành.

Câu II (2 điểm):

- 1: Giải phương trình: $4\sin^2 x + 1 = 8\sin^2 x \cos x + 4\cos^2 2x$
- 2: Giải bất phương trình: $x^2 + 4x + 1 > 3\sqrt{x}(x + 1)$

Câu III (1 điểm): Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} dx$

Câu IV (1 điểm): Cho hình hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = \frac{3}{4}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng tam giác SAC vuông và tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu V (1 điểm): Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 \\ (3 - x)\sqrt{2 - x} - 2y\sqrt{2y - 1} = 0 \end{cases}$$

PHẦN RIÊNG: Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B

A. Theo chương trình chuẩn

Câu VI/a: (2 điểm)

1. Trong mpOxy cho tam giác ABC cân tại A . Đường thẳng AB và BC lần lượt có phương trình: $7x + 6y - 24 = 0$; $x - 2y - 2 = 0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

2. Trong kgOxyz viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 1 = 0$; $(\beta): 2x - z = 0$ và tạo với mặt phẳng $(Q): x - 2y + 2z - 1 = 0$ góc φ mà

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

Câu VII/a: (1 điểm) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z + (1 - 2i)| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 34$

B. Theo chương trình nâng cao

Câu VI/b: (2 điểm)

1. Trong mpOxy cho tam giác ABC cân tại A . Đường thẳng AB và BC lần lượt có phương trình: $7x + 6y - 24 = 0$; $x - 2y - 2 = 0$. Viết phương trình đường trung tuyến kẻ từ B của tam giác ABC

2. Trg kgOxyz viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$, cắt

các đường thẳng $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$; $(D'): \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ và tạo với (D) một góc 30°

Câu VII/b: (1 điểm) Giải phương trình: $x + 4.15^{\log_3 \sqrt{x}} - 5^{1 + \log_3 x} = 0$

----- Hết -----

Hướng dẫn giải:

Câu I: 1. bạn đọc tự giải

2. Đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với trục hoành khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} (x+2)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - (2m-4)x + m^2 - 2m - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

*) Với $x = -2$ thay vào (2): $m = -1$

*) (3) có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 2$, (3) có hai nghiệm $x = \frac{m \pm \sqrt{12 - 3m^2}}{2}$

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{12 - 3m^2} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Câu II: 1. $4\sin^2 x + 1 = 8\sin^2 x \cos x + 4\cos^2 2x \Leftrightarrow 5 - 4\cos^2 x = 8\cos x - 8\cos^3 x + 16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 4$

$$\Leftrightarrow 16\cos^4 x - 8\cos^3 x - 12\cos^2 x + 8\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(8\cos^3 x - 6\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\cos 3x + 1) = 0$$

2. $x^2 + 4x + 1 > 3\sqrt{x}(x+1)$ Điều kiện $x \geq 0$

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$

Bất phương trình trở thành $t^4 + 4t^2 + 1 > 3t^3 + 3t \Leftrightarrow t^4 - 3t^3 + 4t^2 - 3t + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 - t + 1) > 0 \Leftrightarrow \forall t \neq 1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Câu III: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 + \frac{4x^2 - 2}{(x-1)^2(x+1)^2} \right) dx = 1 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left(3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 3\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \dots$$

Câu VI: ABCD là hình thoi, gọi O là tâm, P là trung điểm của SC

Ta có $BD \perp (SAC)$, $SC \perp (PBD)$, $OP = \frac{1}{2}SA = \frac{3}{8}$

$$\Rightarrow SC \perp OP$$

OP là đường TB của tam giác SAC, vậy $SC \perp SA$

$$\Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow SA = \frac{5}{4}$$

Gọi H là chân đường cao $\Rightarrow H \in AC$, $SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{3}{5}$

$$\text{Ta có: } BD = 2\sqrt{BP^2 - OP^2} = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

$$V = \frac{1}{6} AC \cdot DB \cdot SH$$

Câu V: $\begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 & (1) \\ (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 & (2) \end{cases}$ Điều kiện $x \leq 2$ và $y \geq \frac{1}{2}$

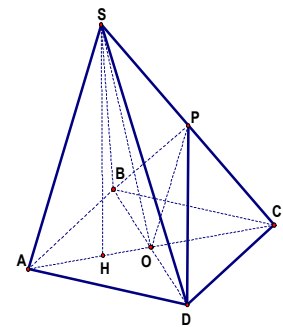
$$(2) \Leftrightarrow [1 + (2-x)]\sqrt{2-x} = [1 + (2y-1)]\sqrt{2y-1}$$

Xét hàm số $f(t) = (1+t^2)t = t^3 + t$

$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số tăng trên \mathbb{R}

$$(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2-x = 2y-1 \Leftrightarrow 2y = 3-x$$

Thay vào (1): $x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Nghiệm của hệ (1;1)



Câu VI.a:

$$1. B = AB \cap AC, B\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

Theo yêu cầu bài toán ta có vô số tam giác thỏa mãn bài toán mà các cạnh AC nằm trên các đường thẳng // với nhau.

$$\text{Chọn } M(4;1) \in BC, M \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow C\left(5; \frac{3}{2}\right)$$

Tam giác ABC cân tại A, Vậy $AM \perp BC \Rightarrow AM: 2x + y - 9 = 0$

$$A = AM \cap AB \Rightarrow A(6;-3)$$

Đường cao BH đi qua B có VTPT $\overline{AC} \Rightarrow$ pt

$$2. \text{ Gọi } d \text{ là giao tuyến của } (\alpha) \text{ và } (\beta) \Rightarrow d: \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Lấy } A(0;1;0), B(1;3;2) \in d$$

(P) qua A, (P) có dạng phương trình: $Ax + By + Cz - B = 0$

$$(P) \text{ qua B nên: } A + 3B + 2C - B = 0 \Rightarrow A = -(2B + 2C)$$

$$\text{Vậy } (P): -(2B + 2C)x + By + Cz - B = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{|-2B - 2C - 2B + 2C|}{3\sqrt{(2B + 2C)^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \Leftrightarrow 13B^2 + 8BC - 5C^2 = 0, \text{ Chọn } C = 1 \Rightarrow B = 1; B = 5/13$$

$$+. \text{ Với } B = C = 1; (P): -4x + y + z - 1 = 0$$

$$+. \text{ Với } B = 5/13 \text{ và } C = 1; (P'): -23x + 5y + 13z - 5 = 0$$

Câu VII.a: Gọi $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ 5y^2 - 28y + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ x = -29/5 \\ y = 3/5 \end{cases} \Rightarrow z$$

Câu VI.b: 1. Cách giải như câu VI.a, đường trung tuyến xuất phát từ B và qua trung điểm N của AC

2. Ta có (D) nằm trong (P) Gọi $A = (D') \cap (P)$, giải hệ ta được $A(5;-1;5)$

Lấy $B(1+t; t; 2+2t) \in (D)$; $\overline{AB} = (t-4; t+1; 2t-3)$ là VTCP của d

$$\text{Ta có } \cos 30^\circ = \frac{|6t-9|}{\sqrt{6}\sqrt{(t-4)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$*) \text{ Với } t = -1 \text{ thì } \overline{AB} = (-5; 0; -5) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 5+t \\ y = -1 \\ z = 5+t \end{cases}$$

$$*) \text{ Với } t = 4 \text{ thì } \overline{AB} = (0; 5; 5) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 5 \\ y = -1+t \\ z = 5+t \end{cases}$$

$$\text{Câu VII.b: } x + 4.15^{\log_3 \sqrt{x}} - 5^{1+\log_3 x} = 0 \Leftrightarrow 3^{\log_3 x} + 4.15^{\frac{1}{2}\log_3 x} - 5.5^{\log_3 x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 x} + 4\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{\log_3 x} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

-----Hết-----