BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT

NĂM 2015

Môn: TOÁN

Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian phát đề)*

Ngày thi thứ nhất: **08/01/2015**

Bài 1. *(5,0 điểm)* Cho a là số thực không âm và (u_n) là dãy số xác định bởi

$$u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2+a}\sqrt{u_n^2+3} \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

a) Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mọi $a \in [0;1]$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Bài 2. *(5,0 điểm)* Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

Bài 3. *(5,0 điểm)* Cho số nguyên dương K. Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) n chia hết cho 3;

ii) các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $\{2,0,1,5\}$.

Bài 4. *(5,0 điểm)* Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O), BC không là đường kính. Một điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Cho (I) là đường tròn thay đổi đi qua E, F và có tâm là I.

a) Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại điểm D. Chứng minh rằng $\dfrac{DB}{DC} = \sqrt{\dfrac{\cot B}{\cot C}}$.

b) Giả sử (I) cắt cạnh BC tại hai điểm M, N. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và P, Q là các giao điểm của (I) với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Đường tròn (K) đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại điểm T (T cùng phía A đối với PQ). Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc $\widehat{MTN}$ luôn đi qua một điểm cố định.

---------- **HẾT** ----------