

COMPENDIO DE MATEMÁTICA

**SOLUCIONARIO
DE
ÁLGEBRA**

Profesor: **LUIS MANRIQUE L.**



COMPENDIO DE MATEMÁTICA

SOLUCIONARIO DE ÁLGEBRA



Composición, Diagramación, Montaje e Impresión :

Editorial Cuzcano S.A.C.

R.U.C. N°20510252021

Esta obra se terminó de imprimir en el mes de Setiembre del 2006

© EDITORIAL CUZCANO S.A.C

Derechos Reservados

Prohibida la reproducción de esta obra por
cualquier medio, total o parcialmente, sin
permiso expreso de la Editorial.

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°2006-8721

Pedidos:

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Telefax 423-8154

LIMA - PERÚ

ÍNDICE

| | Página |
|---|--------|
| CAPÍTULO I Conjuntos numéricos y leyes de exponentes | 7 |
| CAPÍTULO II Polinomios | 13 |
| CAPÍTULO III Productos notables | 20 |
| CAPÍTULO IV División polinomial | 28 |
| CAPÍTULO V Números reales | 41 |
| CAPÍTULO VI Factorización de polinomios | 47 |
| CAPÍTULO VII Números complejos | 59 |
| CAPÍTULO VIII Teoría de ecuaciones | 70 |
| CAPÍTULO IX Ecuaciones polinomiales de grado superior | 77 |
| CAPÍTULO X Matrices y determinantes | 90 |
| CAPÍTULO XI Sistemas de ecuaciones lineales | 104 |
| CAPÍTULO XII Sistemas de ecuaciones de grado superior y no lineales | 109 |
| CAPÍTULO XIII Desigualdades | 117 |
| CAPÍTULO XIV Inecuaciones | 123 |

ÁLGEBRA

ÍNDICE

Compendio de Álgebra

Solucionario



ÍNDICE

| | Página |
|--|--------|
| CAPÍTULO XV Valor absoluto | 132 |
| CAPÍTULO XVI Funciones | 141 |
| CAPÍTULO XVII Logaritmos | 154 |
| CAPÍTULO XVIII Límite de una función real en una variable real | 165 |
| CAPÍTULO XIX Derivada de una función | 177 |
| CAPÍTULO XX Binomio de Newton | 189 |
| CAPÍTULO XXI Sucesiones y series | 202 |

ÁLGEBRA



ÍNDICE

CONJUNTOS NUMÉRICOS Y LEYES DE EXPONENTES

Álgebra

CAPÍTULO

① TRANSFORMEMOS LOS EXPONENTES NEGATIVOS.

$$\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{11}\right)^{-1} - 6\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + [-6(5^{-1})]^0$$

$$625^{\frac{1}{2}} + 11 - 6 \times 5 + 1$$

$$\sqrt{625} + 11 - 30 + 1$$

$$25 + 11 - 30 + 1 = 7$$

② TÉNGASE PRESENTE:

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ VECES}} = a^n$$

APLICANDO, SE TIENE:

$$(2^2)^n \cdot [(2^{2^3})^{2^{n-4}}]^2$$

$$(2)^{2n} \cdot (2)^{2n}$$

$$= \frac{2^{2n} \cdot 2^{3 \cdot 2^{n-4} \cdot 2}}{2^{2n} \cdot 2^{2n}}$$

$$= \frac{2^{2^{3+n-4+1}}}{2^{2n}} = \frac{2^{2^n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}$$

③ DATO: $2^n = 3$
LA EXPRESIÓN A CALCULAR, SE

PUEDE ESCRIBIR:

$$\frac{2^n \cdot n \cdot (2^{2n})^n \cdot (7^{-n^2})^n}{3^{n+6}}$$

$$= \frac{(2^n)^n \cdot (2^n)^{2n} \cdot 7^{-[n \cdot n \cdot 2]}}{3^n \cdot 3^6}$$

USANDO EL DATO, SE TIENE:

$$= \frac{3^n \cdot 3^{2(3)} \cdot 7^{-n^0} \text{ "OJO" }}{3^n \cdot 3^6} ; -n^0 = -1$$

$$= \frac{3^6 \cdot 7^{-1}}{3^6} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

④ TRANSFORMEMOS LOS EXPONENTES NEGATIVOS:

$$\frac{\left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{6x}\right) \cdot \left(\frac{1}{2x+x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2x+x}{6x}\right) \cdot \left(\frac{1}{2x+x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{6x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{6x} = \frac{1}{6} = 6^{-1}$$

⑤ DESCOMPONGAMOS LAS BASES EN SUS FACTORES PRIMOS, ASÍ:

$$\frac{(5^2 \cdot 2^2)^3 (3 \cdot 7)^4 (3^3)^2}{2(2 \cdot 3)^5 (3 \cdot 5)^2 (5 \cdot 7)^4}$$

$$= \frac{5^6 \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^4 \cdot 3^6}{2 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 5^4 \cdot 7^4}$$

$$= \frac{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^4}{2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7^4} = 3^3 = 27$$

06) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$M = \frac{5^{4n} \cdot 5^{n+1} + 5^{4n}}{5^{2n} \cdot 5^{n+1} + 5^{2n}}$$

EXTRAEMOS "FACTOR" EN EL NUMERADOR Y DENOMINADOR:

$$M = \frac{5^{4n} (5^{n+1} + 1)}{5^{2n} (5^{n+1} + 1)}$$

$$M = 5^{2n} \rightarrow M = (5^2)^n$$

$$\text{DE AQUÍ: } M = 5^2 \therefore \sqrt[4]{M} = \sqrt{5}$$

07) DE $2^{2a} = 2^5$

OBJ: BASES IGUALES, ENTONCES:

$$2^{2a} = 2^5 \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

NOSE PIDEN:

$$4^{2a} = 4(a)^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= 4 \cdot \frac{25}{4} = 25$$

08) DATO: $x^x = 6$; $x > 0$, x ES PAR
¡ESTO ES ABSURDO!

¿POR QUÉ?, PORQUE SI x ES PAR POSITIVO $\Rightarrow x = 2; 4; 6; 8; \dots$
DE AQUÍ, ¿CUÁL DE LAS x ELEVADA A SI MISMA NOS DA COMO RESULTADO 6? ¡NINGUNO!

CORRECCIÓN

DEBE DECIR: SI $x^x = 6$

REDUCEA

$$\left[x^x x^x + x - (-x)^x \right] x^{-x^6}$$

$$\frac{x^{-2x^6+3} + x^3}{x^{-x^6}}$$

REEMPLAZAMOS EL DATO EN LA EXPRESIÓN A CALCULAR, SE TIENE:

$$\frac{\left[x^6 + x - (-x)^6 \right] x^{-x^6}}{x^{-2x^6+3} + x^3} \quad \text{"OJO"} \quad ; (-x)^6 = x^6$$

TRABAJEMOS POR PARTES, CON EL NUMERADOR (N). HAGAMOS $x^6 = a$

$$\Rightarrow N = (x^a + x^{-a}) x^{-a}$$

$$= \underbrace{x^a \cdot x^{-a}} + \underbrace{x^{-a} \cdot x^{-a}} = x^0 + x^{-2a}$$

$$\text{DE AQUÍ: } N = 1 + x^{-2x^6}$$

DEL DENOMINADOR (D):

$$D = x^{-2x^6} \cdot x^3 + x^3$$

$$\sqrt[4]{0,01} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$\sqrt[4]{0,001} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

LUEGO, POR CONDICIÓN:

$$\sqrt[4]{(10^{-1})^{-m}} \sqrt[4]{(10^{-2})^{-2m}} \sqrt[4]{10^{-3}} = 10$$

$$\sqrt[4]{10^m} \sqrt[4]{10^{4m}} \sqrt[4]{10^{-3}} = 10$$

APLICANDO FORMA PRÁCTICA:

$$10^{\frac{12m-3}{8}} = 10^1$$

OBJ: BASES IGUALES, ENTONCES,

$$\frac{12m-3}{8} = 1 \rightarrow m = \frac{11}{12}$$

12) CALCULEMOS POR SEPARADO

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{HACEMOS: } E = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

ELEVAMOS AL CUADRADO:

$$E^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 6$$

$$E^2 = 6 \rightarrow E = \sqrt{6}$$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO, SE TIENE:

$$(\sqrt{\sqrt{6}} + \sqrt[4]{6})^4 = (2\sqrt[4]{6})^4 = 2^4 \cdot 6 = 96$$

13) USEMOS EL DATO $x^x = 2$, TRANS

FORMANDO LA EXPRESIÓN:

$$2^{\frac{x}{x}} \cdot x^{4x^{1-3x+x^{x+1}}} + 1$$

$$= 2^{\frac{x}{x}} \cdot x^{4x^{1-3x+x^{x+1}}} \cdot x$$

$$\text{OJO: } a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$$

$$= (2^{\frac{x}{x}})^{x^{4x^{1-3x+2x}}}$$

$$= (2^{\frac{x}{x}})^{x^{4x^{1-x}}} = (2^{\frac{x}{x}})^{(x^{1-x})^4}$$

$$= 2^{\frac{x}{x}} = 2^1 = 2$$

$$= (2^{\frac{x}{x}})^2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$$

14) ELEVAMOS LA IGUALDAD A LA

$$a: \frac{x^a + 5^a}{80^a + x^a} = \frac{1}{4^a}$$

$$x^a \cdot 4^a + 5^a \cdot 4^a = 80^a + x^a$$

$$x^a \cdot 4^a + 20^a = 20^a \cdot 4^a + x^a$$

$$x^a \cdot 4^a - x^a = 20^a \cdot 4^a - 20^a$$

$$x^a(4^a - 1) = 20^a(4^a - 1)$$

$$\text{DE AQUÍ: } x^a = 20^a \therefore x = 20$$

⑮ TRANSFORMANDO:

$$\begin{aligned} & \sqrt[10]{x} \cdot \sqrt[10]{x^3} \cdot \sqrt[10]{x^5} \cdot \sqrt[10]{x^7} \dots \\ &= x^{\frac{1}{10}} \cdot x^{\frac{3}{10^2}} \cdot x^{\frac{5}{10^3}} \cdot x^{\frac{7}{10^4}} \dots \\ &= x^{\frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \dots} \end{aligned}$$

AHORA, CALCULEMOS EL EXPONENTE.

$$\text{SEA } S = \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \dots \quad (\text{I})$$

MULTIPLICANDO POR $\frac{1}{10}$:

$$\frac{1}{10}S = \frac{1}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \dots \quad (\text{II})$$

(I) - (II):

$$\frac{9}{10}S = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \dots$$

$$\frac{9}{10}S - \frac{1}{10} = \frac{2}{10} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$$

LLAMEMOS "E"

$$\Rightarrow E = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots$$

$$E = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$$

SIGUE SIENDO E

$$\Rightarrow E = \frac{1}{10} (1 + E) \rightarrow 10E = 1 + E$$

DE AQUÍ: $E = \frac{1}{9}$

LUEGO:

$$\frac{9}{10}S - \frac{1}{10} = \frac{2}{10} \left(\frac{1}{9} \right)$$

DE AQUÍ: $9S - 1 = \frac{2}{9} \rightarrow 9S = \frac{11}{9}$

$$\therefore S = \frac{11}{81}$$

⑯ TRANSFORMEMOS:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{3}} \\ &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

DE AQUÍ:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{27}} \right)^{(3\sqrt{3})^{-1}}$$

\therefore (I) y (II) SON EQUIVALENTES

⑰ SEA LO PEDIDO:

$$L = \frac{2^{\frac{a-b}{a+b}} \cdot 2^{\frac{b-c}{b+c}}}{2^{\frac{a-c}{a+c}}}$$

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} - \frac{a-c}{a+c}$$

$$L = 2$$

O TAMBIÉN (CAMBIANDO DE SIGNO):

$$L = 2^{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{a+c}}$$

DEL DATO, multiplicamos por 2:

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{a+c} = 8$$

$$\frac{2a}{a+b} - 1 + \frac{2b}{b+c} - 1 + \frac{2c}{a+c} - 1 = 5$$

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{a+c} = 5$$

REEMPLAZANDO EN L:

$$L = 2^5 = 32$$

18

DATO: $S_n = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ n VECES

(*) $S_1 = 2$; $S_2 = 2^2 = 4$

LUEGO:

$S_1^{S_2} = 2^4 = 16$; $S_2^{S_1} = 4^2 = 16$

OBJ: $S_1^{S_2} = S_2^{S_1} \Rightarrow (I) \text{ ES V}$

(**) $S_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$

OBJ: $S_3 + S_1 = 16 + 2 = 18$
 $\Rightarrow (II) \text{ ES V}$

(***) DE $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \dots S_K = 4^n$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2$ K VECES $= 4^n$

$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2^{K-1}}$ $(K-1)$ VECES $= 2^{2^K}$

DE AQUÍ:

$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2^{K-1}}$ $(K-1)$ VECES $= 2^{2^K}$
 ESTO ES # PAR # PAR
 ESTO ES # IMPAR

OBJ: $\nexists K \in \mathbb{Z}^+$ QUE VERIFIQUE LA IGUALDAD $\Rightarrow (III) \text{ ES F}$
 $\therefore \text{VVFF}$

19 TRABAJEMOS EN EL EXPONENTE DE LA BASE.

OBJ: $4\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^3}$; $3\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^4}$

EXPONENTE $= \frac{\sqrt[12]{3^3}}{\sqrt[12]{3^4}} = \left[\frac{\sqrt[12]{3^3} + \sqrt[12]{3^4}}{1 + \sqrt[12]{3}} \right]^{\frac{1}{3}}$

Exp. $= \frac{1}{\sqrt[12]{3}} \left[\frac{\sqrt[12]{3^3} (1 + \sqrt[12]{3})}{1 + \sqrt[12]{3}} \right]^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{\sqrt[12]{3}} [\sqrt[12]{3^3}]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \text{Exp.} = 1$

\Rightarrow LO PEDIDO ES: $3^1 = 3$

20 DE $x = 2^{x-1} \rightarrow x^{\frac{x}{x-1}} = 2$

TRANSFORMAMOS EL 2º MIEMBRO:

$x^{\frac{x}{x-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)$
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)$
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}$

COMPARANDO: OBJ. $x = \frac{1}{2}$

DE $2 = 2^{2-1} \rightarrow 2^{\frac{2}{2-1}} = 2$

$2^{\frac{2}{2-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$
 $= \left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}$

COMPARANDO: OBJ: $2 = \frac{1}{3}$

$\therefore 2 + x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

POLINOMIOS

Algebra

CAPÍTULO

01) HALLEMOS $P(x)$ EN OTRA FORMA:

$$P(x) = (2x)^{10} + (2x)^9 + (2x)^8 + \dots + (2x) + 1$$

MULTIPLICAMOS POR $(2x)$:

$$(2x)P(x) = (2x)^{11} + (2x)^{10} + (2x)^9 + \dots + (2x)^2 + (2x) \quad (\alpha)$$

• RESTAMOS $(\beta) - (\alpha)$:

$$(2x)P(x) - P(x) = (2x)^{11} - 1$$

$$(2x-1)P(x) = (2x)^{11} - 1$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{(2x)^{11} - 1}{(2x) - 1}$$

Aquí:

$$\neq P(-1) = \frac{(-2)^{11} - 1}{-2 - 1} = \frac{-(2^{11} + 1)}{-3}$$

$$P(-1) = \frac{2^{11}}{3} + \frac{1}{3} \rightarrow P(-1) - \frac{1}{3} = \frac{2^{11}}{3}$$

$$\neq P(1) = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1$$

$$\rightarrow P(1) + 1 = 2^{11}$$

LUEGO:

$$\frac{P(-1) - \frac{1}{3}}{P(1) + 1} = \frac{\frac{2^{11}}{3} - \frac{1}{3}}{2^{11}} = \frac{2^{11} - 1}{3 \cdot 2^{11}} = \frac{1}{3}$$

02) DATO: $f(x) = 3x + 1$
CONDICIÓN:

$$f(x-1) + f(x+3) + f(2) = 2f(x)$$

$$[3(x-1)+1] + [3(x+3)+1] + (3 \cdot 2 + 1) = 2$$

$$2(3x+1)$$

$$3x-2+3x+10+3 \cdot 2+1 = 6x+2$$

$$3 \cdot 2 + 9 = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 = -7$$

$$\therefore 3 \cdot 2 - 1 = -8$$

03) DE $2f(x-1) - 7 = 7x - \frac{f(x-1)}{3}$

$$\Rightarrow 6f(x-1) - 21 = 21x - f(x-1)$$

$$7f(x-1) = 21x + 21$$

$$\rightarrow f(x-1) = 3x + 3$$

$$f(x-1) = \underline{3x-3+6}$$

$$f(x-1) = 3(x-1) + 6$$

$$\begin{aligned} \text{Aquí: } \neq f(x) &= 3x + 6 \\ \text{y } \neq f(2x) &= 3(2x) + 6 \end{aligned} \quad \oplus$$

$$\therefore f(x) + f(2x) = 9x + 12$$

04) DATO: $f\left(\frac{x^2+a}{x^2-b}\right) = x^2 - b \dots (I)$

COMO NOS PIDEN $f\left(\frac{b}{a}\right)$, ENTON:

$$\text{CEJ: } \frac{x^2+a}{x^2-b} = \frac{b}{a}$$

$$ax^2 + a^2 = bx^2 - b^2$$

$$\Rightarrow ax^2 - bx^2 = -a^2 - b^2$$

$$(a-b)x^2 = -(a^2+b^2)$$

$$x^2 = \frac{-(a^2+b^2)}{a-b} \rightarrow x^2 = \frac{a^2+b^2}{b-a}$$

$$\text{LUEGO, EN (I): } f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a^2+b^2}{b-a} - b$$

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a^2 + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 2b}{b-a}$$

$$\therefore f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a^2 + 2b}{b-a}$$

05) TRANSFORMANDO:

$$\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x+K}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$(x+2)[A(x-1)+B(x+1)] = x^2-x+K$$

POR SER IDENTIDAD, DAMOS VALORES:

$$\bullet x = -2 \rightarrow 0 = 4 + 2 + K \rightarrow K = -6$$

$$\bullet x = -1 \rightarrow -2A = 1 + 1 - 6 \rightarrow A = 2$$

$$\bullet x = 1 \rightarrow 3(2B) = 1 - 1 - 6 \rightarrow B = -1$$

$$\therefore K \cdot B + A = (-6)(-1) + 2 = 8$$

06) DATO: $P(x) = 2x+1$

$$\bullet K=1 \rightarrow P(x) = 2x+1 = 2x+(2-1)$$

$$\hookrightarrow 2x+(2-1) \equiv n^2x+(m^5-1)$$

Obs: $m; n \notin \mathbb{N}$

$$\bullet K=2 \rightarrow P(P(x)) = P(2x+1)$$

$$= 2(2x+1)+1$$

$$= 4x+3$$

$$= 2^2x+(2^2-1)$$

$$\hookrightarrow 2^2x+(2^2-1) \equiv n^2x+(m^5-1)$$

Obs: $m \notin \mathbb{N}$

$$\bullet K=3 \rightarrow P(P(P(x))) = P(4x+3)$$

$$= 2(4x+3)+1$$

$$= 8x+7$$

$$= 2^3x+(2^3-1)$$

$$\hookrightarrow 2^3x+(2^3-1) \equiv n^2x+(m^5-1)$$

Obs: $m; n \notin \mathbb{N}$

Si SEGUIMOS DANDO VALORES A K, PODEMOS INDUCIR QUE m y $n \in \mathbb{N}$ CUANDO $K=10$. ADemás m y n AQUÍ SERÁN MÍNIMOS.

VEAMOS:

SEGÚN LA REGLA, CUANDO $K=10$, SE TIENE:

$$\underbrace{P(P \dots P(x)) \dots}_{10 \text{ VECES}} = 2^{10}x+(2^{10}-1)$$

$$\text{Obs: } 2^{10}x+(2^{10}-1) \equiv n^2x+(m^5-1)$$

$$\text{DE AQUÍ: } \neq 2^{10} = n^2 \rightarrow n^2 = (2^5)^2$$

$$\text{Obs: } n = 2^5 = 32$$

$$\neq 2^{10} = m^5 \rightarrow m^5 = (2^2)^5$$

$$\text{Obs: } m = 2^2 = 4$$

$$\therefore m+n = 4+32 = 36$$

07) TRANSFORMEMOS $P(x)$:

$$P(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$= \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$= \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x \cdot x^2}$$

$$= \sqrt[3]{x^3} \hookrightarrow P(x) = x$$

APLICANDO LEGENDRE:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2(x^2+1^2)}{2ab} \rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2+1^2}{2ab}$$

O TAMBIÉN: $\frac{x-1}{x+1} = 2 \frac{ab}{x^2+1^2}$

ESTO ES y
(DATO)

LUEGO:

$$\frac{x-1}{x+1} = 2y \rightarrow \frac{x-1}{y(x+1)} = 2$$

$$\therefore M(x,y) = 2$$

(12) NOS PIDEN:

$$J(x,y,z) = \frac{x^3 + z^3 - y^3}{xyz}$$

LUEGO: Si $x=87; y=222; z=135$

$$\Rightarrow x+z-y=0$$

DE AQUÍ, POR PRODUCTOS NOTABLES:

$$\text{Si } x+z+(-y)=0$$

$$\Rightarrow x^3 + z^3 + (-y)^3 = 3xz(-y)$$

$$\Rightarrow x^3 + z^3 - y^3 = -3xyz$$

ENTONCES: $J(x,y,z) = \frac{-3xyz}{xyz} = -3$

(13) EVALUAMOS x ; ESCRIBIMOS:

$$x = \frac{2-1}{1 \times 2} + \frac{3-2}{2 \times 3} + \frac{4-3}{3 \times 4} + \frac{5-4}{4 \times 5} + \dots$$

$$+ \frac{100-99}{99 \times 100}$$

DESDOBLAMOS EN CADA FRACCIÓN
SE OBTIENE:

$$x = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} \rightarrow x = \frac{99}{100}$$

$$\rightarrow 100x = 99 \text{ ó } \frac{100}{99}x = 1$$

REEMPLAZANDO EN P:

$$P(x) = (1)^2 - (x) + x \therefore P(x) = 1$$

(14) Si $P(x^2) = x^2 - 1$; ENTONCES:

$$\begin{aligned} * P(x^2+x+1) &= (x^2+x+1) - x \\ &= x^2+x = x(x+1) \end{aligned}$$

ADemás:

$$\begin{aligned} * P(x^2-x+1) &= (x^2-x+1) - x \\ &= x^2-x = x(x-1) \end{aligned}$$

LUEGO:

$$\frac{P(x^2+x+1)}{P(x^2-x+1)} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

(15) DATO: $f(x^2+x) = x$

HAGAMOS APARECER (x^2+x) EN EL
2º MIEMBRO. VERIFIQUESE LAS
TRANSFORMACIONES:

$$f(x^2+x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f(x^2+x) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

$$\underline{f(x^2+x)} = \sqrt{\underline{x^2+x + \frac{1}{4}}} - \frac{1}{2}$$

AQUÍ: $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1+4x} - \frac{1}{2}$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO,
SE TIENE: $a = \frac{1}{2}$ y $b = 4$
 $\therefore ab = 2$

16) DEL DATO: $x+2 = 34\sqrt{2x}$

• SUMAMOS $2\sqrt{2x}$:

$$x + 2\sqrt{2x} + 2 = 34\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x}$$

$$\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{2} + 2^2} = 36\sqrt{2x}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 = 36\sqrt{2x}$$

• SACANDO $\sqrt{}$:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2x}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2x}$$

EN $S(x)$: $S(x) = \sqrt{6 \times 6} = 6$

17) OBS. DESDOBLANDO:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

CON ESTO:

$$* f(1) = 2 + 1$$

$$* f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2$$

$$* f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + 3$$

\vdots

$$* f\left(\frac{1}{20}\right) = 2 + 20$$

(+)

$$f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{20}\right) = ?$$

$$\frac{2+2+2+\dots+2}{20 \text{ SUMANDOS}} + \frac{1+2+3+\dots+20}{\text{CONOCIDO}}$$

$$M = 2(20) + \frac{20 \times 21}{2}$$

$$M = 40 + 210 = 250$$

18) DATO: $f(x) = ax + b$

$$* f(b) = ab + b$$

$$* f(f(b)) = f(ab + b) = a(ab + b) + b$$

$$2 \text{ VECES} = a^2b + ab + b$$

$$* f(f(f(b))) = f(a^2b + ab + b)$$

$$3 \text{ VECES} = a(a^2b + ab + b) + b$$

$$= a^3b + a^2b + ab + b$$

$$* f(f(f(f(b)))) = f(a^3b + a^2b + ab + b)$$

$$4 \text{ VECES} = a(a^3b + a^2b + ab + b) + b$$

$$= a^4b + a^3b + a^2b + ab + b$$

SEGÚN ESTO, POR INDUCCIÓN, PODEMOS DECIR:

$$f(\dots f(f(f(b))) \dots) = ?$$

n VECES

$$a^nb + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b$$

$$= b(a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

CONOCIDO COMO:

COCIENTE NOTABLE

$$= \left(\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \right) b$$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO, TENEMOS:

$$\frac{(a+1)\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)}{a} + 1$$

$$= (a^{n+1} - 1) + 1 = a^{n+1}$$

⑩ OBS: $f(x) = x^2 + 4x + \frac{7}{4} + 3$

$$\Rightarrow f(x) = (x+2)^2 + 3$$

Aquí:

$$* f(\sqrt{2}-2) = (\sqrt{2}-2+2)^2 + 3 = 5$$

$$* f(\sqrt{3}-2) = (\sqrt{3}-2+2)^2 + 3 = 6$$

$$\therefore f(\sqrt{2}-2) + f(\sqrt{3}-2) = \underline{11}$$

⑪ TÉNGASE EN CUENTA LO PLANTEADO EN LA RESOLUCIÓN ⑩
¡REVISE!

$$\Rightarrow a-4 > 0 \wedge a-5 > 0 \wedge a+2 > 0$$

$$\underline{a > 4 \wedge a > 5 \wedge a > -2}$$

CONCLUSIÓN: $a > 5 \dots (1)$

ADemás:

$$\left[\frac{a}{2} \text{ y } \left(\frac{a}{4} + 1\right)\right] \in \mathbb{Z}_0^+ \dots (2)$$

DE (1), LOS VALORES QUE VERIFICAN (2) SON:

$$a = 8; 12; 16; 20; \dots$$

Aquí, POR CADA VALOR DE "a"

SE OBTIENE UN POLINOMIO $M(x; y)$

PERO, EL DE MENOR GRADO ABSOLUTO, SE OBTIENE PARA $a = 8$.

$$\Rightarrow M(x; y) = 11x^4y^4 - x^3y^3 - \sqrt{2}x^{10}y^7$$

$$\text{OBS: } SA(M) = \underline{17}$$

⑫ DEL POLINOMIO $P(x; y; z)$, VEMOS:

$$* Gr_x = (a+1)b^a$$

$$* Gr_y = (a-1)a^{2b}$$

$$* Gr_z = b^{a+2b}$$

CONDICIÓN:

$$Gr_x = Gr_y = Gr_z$$

$$\Rightarrow (a+1)b^a = (a-1)a^{2b} = b^{a+2b}$$

(1) (2) (3)

$$\cdot (1) = (3): \frac{b^a}{(a+1)b^a} = \frac{b^{a+2b}}{b^{a+2b}}$$

$$\rightarrow (a+1)b^a = (b^2)^b \Rightarrow a+1 = b^2 \quad (\alpha)$$

$$\cdot (2) = (3): \frac{(a-1)a^{2b}}{(a-1)a^{2b}} = \frac{b^{a+2b}}{b^{a+2b}}$$

$$\rightarrow (a-1)a^a = b^a \Rightarrow a-1 = b \quad (\beta)$$

$$\cdot (\alpha) - (\beta): 2 = b^2 - b$$

$$\rightarrow 2x^2 = b(b-1)$$

$$\text{OBS: } b = 2; \text{ EN } (\beta): a = 3$$

$$\therefore a+b = \underline{5}$$

$$\textcircled{22} * P(x; y) = y^{\frac{64}{n}} \cdot x^{5-n}$$

SERÁ RACIONAL ENTERO, SI LOS EXPONENTES DE x E y SON NÚMEROS ENTEROS NO NEGATIVOS.

$$\Rightarrow 5-n \geq 0 \wedge \frac{64}{n} \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\rightarrow \underline{n \leq 5 \wedge n > 0}, \wedge n \text{ ES DIVISOR DE } 64$$

$$0 < n \leq 5$$

↳ DEBE DIVIDIR A 64.

$$\text{DE AQUÍ: } n = 1; 2; 4$$

$$\therefore n \text{ TOMA } \underline{3 \text{ VALORES}}$$

23) RECUERDE

CUANDO UN POLINOMIO $P(x)$ DE GRADO n SE ANULA PARA POR LO MENOS $(n+1)$ VALORES DE x DIFERENTES, SE CONCLUYE QUE, $P(x)$ ES IDÉNTICAMENTE NULO. POR TANTO, CADA COEFICIENTE DEL POLINOMIO (REDUCIDO) DEBE VALER 0.

EN NUESTRO CASO; $P(x)$ VERIFICA LO ANTERIOR, POR TANTO:

$P(x)$ ES IDÉNTICAMENTE NULO, DONDE:

$$\begin{cases} *a+b-6abc=0 \rightarrow a+b=6abc \\ *a+c-3abc=0 \rightarrow a+c=3abc \\ *b+c-7abc=0 \rightarrow b+c=7abc \end{cases} \quad (+)$$

SUMANDO LAS IGUALDADES:

$$2(a+b+c) = 16abc$$

DE AQUÍ: $a+b+c = 8abc$

$$\Rightarrow \frac{abc}{a+b+c} = \frac{1}{8}$$

ELEVO A LA (-3):

$$\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} \\ = 8^3 = 512$$

24) $P(2x-1) = (5x-1)^m + (2x+1)^m - 2x+1$

• PARA $x=1$, SE TIENE:

$$P(1) = \sum \text{COEF. DE } P(x) = 4^m + 3^m - 2 + 1$$

• PARA $x=1/2$, SE TIENE:

$$P(0) = \text{T.I. DE } P(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^m + 2^m - 1 + 1$$

CONDICIÓN:

$$P(1) + P(0) = 24 + \left(\frac{3}{2}\right)^m + 2^m$$

$$(4^m + 3^m - 1) + \left(\frac{3}{2}\right)^m + 2^m = 24 + \left(\frac{3}{2}\right)^m + 2^m \\ \Rightarrow 4^m + 3^m = 25 \quad \therefore m = 2$$

25) APLICANDO LEYES DE LOS EXPONENTES:

$$f(x) = \frac{x^{6n-12} \cdot x^{4n-4} \cdot x^4}{x^{4n} \cdot x^8}$$

$$= x^{6n-12+4n-4+4-4n-8}$$

$$\rightarrow f(x) = x^{6n-20}$$

COMO $f(x)$ ES DE 2º GRADO (CUADRÁTICO)

$$\hookrightarrow \text{Exp. DE } x = 6n-20 = 2$$

$$\rightarrow 6n = 22 \quad \therefore n = \frac{11}{3}$$

26) DEL POLINOMIO $P(x,y)$, CALCULEMOS EL GRADO EN CADA UNO DE SUS 3 TÉRMINOS.

$$\begin{cases} *GA(t_1) = m+2p+1 \\ *GA(t_2) = m+2p+5 \\ *GA(t_3) = m+2p \end{cases} \quad \begin{cases} \text{CON ESTO:} \\ GA(P) = m+2p+5 \\ \text{(EL MAYOR)} \end{cases}$$

OSEA QUE: $m+2p+5 = 14$ (DATO)

ADemás: $\Rightarrow m+2p = 9 \dots (1)$

$$*Gr_x = m+p+3 \quad \wedge \quad Gr_y = p+4$$

DATO: $Gr_x - Gr_y = 4$

$$(m+p+3) - (p+4) = 4$$

$$\Rightarrow m+p+3-p-4=4 \rightarrow m=5$$

$$\text{EN (1): } 5+2p=9 \rightarrow p=2$$

$$\therefore m=5 \wedge p=2$$

PRODUCTOS NOTABLES

III

Algebra

CAPÍTULO

01) DESARROLLEMOΣ EN EL NUMERADOR DE LA FRACCIÓN, SE TIENE:

$$\frac{9m^2+3+\frac{1}{4m^2}-4m^2+4-\frac{1}{m^2}+\frac{3}{4m^2}+3}{m^2+2}$$

$$= \frac{5m^2+10+\cancel{\frac{4}{4m^2}}-\cancel{\frac{1}{m^2}}}{m^2+2} = \frac{5(m^2+2)}{m^2+2} = 5$$

02) ESCRIBIMOS ASÍ:
LEGENDE

$$\frac{\left[m-\frac{2}{m}+2\right]^2 + \left[m-\frac{2}{m}-2\right]^2 - \frac{8}{m^2}}{m^2 \left[\left(m+\frac{1}{m}\right)^2 - \left(m-\frac{1}{m}\right)^2\right]}$$

LEGENDE

$$= \frac{2 \left[\left(m-\frac{2}{m}\right)^2 + 2^2 \right] - \frac{8}{m^2}}{m^2 \left[4m - \frac{1}{m} \right]}$$

$$= \frac{2(m^2 - \frac{4}{m} + 4) - \frac{8}{m^2}}{4m^2}$$

$$= \frac{2m^2 + \frac{8}{m^2} - \frac{8}{m^2}}{4m^2} = \frac{2m^2}{4m^2} = \frac{1}{2}$$

03) DE $m^2 + \frac{1}{m^2} = 2 \rightarrow m^4 + 1 = 2m^2$

$$\rightarrow \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{TCP} = 0 \rightarrow (m^2 - 1)^2 = 0$$

DE AQUÍ: $m^2 = 1$

CON ESTO:

$$*(m^2)^3 = 1^3 \rightarrow m^6 = 1$$

ADemás: $(m^6)^2 = 1^2 \rightarrow m^{12} = 1$

LUEGO: $\frac{m^{12} + 1}{3m^6} = \frac{1+1}{3(1)} = \frac{2}{3}$

04) $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

ELEVAMOS AL CUADRADO:

$$\alpha^2 = (2+\sqrt{3}) - 2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$$

RACIONALÍCEMOS EN EL 2º PAREN-
TESIS:

$$\alpha^2 = 2+\sqrt{3} - 2 + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\alpha^2 = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \alpha^2 = 2$$

• TRABAJEMOS CON b EN FORMA SI-
MILAR:

$$b = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$$

$$b^2 = (3+\sqrt{8}) - 2 + \left(\frac{1}{3+\sqrt{8}}\right)$$

RACIONALIZANDO:

$$b^2 = 3+\sqrt{8} - 2 + (3-\sqrt{8}) \Rightarrow b^2 = 4$$

$\therefore \alpha^2 + b^2 = 6$

05) TRANSFORMEMOS \neq :

$$\begin{aligned}
 f &= \sqrt{\frac{2(a^4+a^2)(a^3+a)}{4a^6}} \\
 &= \sqrt{\frac{(a^4+a^2)(a^3+a)}{4a^6}} \\
 &= \sqrt{\frac{(a^4+a^2)^2}{4a^6}} = \frac{a^4+a^2}{2a^3} \\
 &= \frac{a^2(a^2+1)}{2a^3 \cdot a} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+1}{a} \right) \\
 \text{O TAMBIÉN: } f &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{a + \frac{1}{a}}_{\text{DATO}} \right) \\
 \therefore f &= \underline{\underline{5/2}}
 \end{aligned}$$

06) NOS PIDEN:

$$xy \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2+x^2}{xy} = ?$$

DEL DATO: $x+y=3\sqrt{xy}$

AL \square : $x^2+2xy+y^2=9xy$

$\rightarrow x^2+y^2=7xy \therefore \frac{x^2+y^2}{xy} = 7$

07) LEGENDRE

$$\begin{aligned}
 &\frac{[(x^2+2\sqrt{2})^2 + (x^2-2\sqrt{2})^2]^2}{[(x^2+1)(x^2+8)-9x^2]^2} \\
 &\quad \text{EFECTUAR} \\
 &= \frac{[2[(x^2)^2 + (2\sqrt{2})^2]]^2}{[x^4+9x^2+8-9x^2]^2} \\
 &= \frac{[2(x^4+8)]^2}{[x^4+8]^2} = \underline{\underline{4}}
 \end{aligned}$$

08) DESARROLLEMOS EN M y N:

$$\begin{aligned}
 *M &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\
 &\quad - 6x^2 + 8 \\
 \text{REDUCIENDO, SE OBTIENE:} \\
 M &= 1 + 1 + 8 = 10 \\
 *N &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 1 + 3x - 3x^2 + x^3 \\
 &\quad - 2x^3 \\
 \text{REDUCIENDO TENEMOS:} \\
 N &= 3x + 3x = 6x \\
 \therefore MN &= (10)(6x) = \underline{\underline{60x}}
 \end{aligned}$$

09) CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

REDUCEA:

$$\begin{aligned}
 &\frac{(4a-6)(2-a) + 2(2a-3)(1-a) - 2(2-a)(a-1)}{-(2a-3)^2 - (a-1)^2 - (a-2)^2}
 \end{aligned}$$

LO PEDIDO SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\begin{aligned}
 &\frac{2(2a-3)(2-a) + 2(2a-3)(1-a) + 2(2-a)(1-a)}{-(2a-3)^2 - (1-a)^2 - (2-a)^2}
 \end{aligned}$$

NO OLVIDE QUE:

$$(a-1)^2 = (1-a)^2; (a-2)^2 = (2-a)^2$$

SI HACEMOS LO SIGUIENTE:

$$2a-3=x; 1-a=y; 2-a=z$$

NOS PIDEN: $\frac{2xz + 2xy + 2zy}{-x^2 - y^2 - z^2} = ?$

DONDE VEMOS QUE: $x+y+z=0$

AQUÍ, ELEVAMOS AL CUADRADO:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz &= 0 \\
 \text{O } 2xy + 2xz + 2yz &= -x^2 - y^2 - z^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2xy+2xz+2yz}{-x^2-y^2-z^2} = 1$$

10) LEGENDRE DA DIF. □₅

$$[(x+2)^2 + (x-2)^2 - (x+2)(x-2) - 13]$$

$$(x+3)(x-3) + 8$$

DA DIF. □₅

$$\sim \frac{2(x^2+2^2) - (x^2-2^2) - 13}{x^2-9+8}$$

$$= \frac{2x^2+8-x^2+4-13}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1$$

11) DEL DATO: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$

(1º) DESPEJANDO: $\frac{x}{y} + \frac{z}{x} = -\frac{y}{z}$

$$\rightarrow \frac{x^2+yz}{xy} = -\frac{y}{z} \rightarrow x^2+yz = -\frac{xy^2}{z}$$

(2º) OTRO DESPEJE: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = -\frac{z}{x}$

$$\rightarrow \frac{xz+y^2}{yz} = -\frac{z}{x} \rightarrow y^2+xz = -\frac{yz^2}{x}$$

(3º) ADEMÁS: $z^2+xy = -\frac{zx^2}{y}$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO:

$$\left(-\frac{xy^2}{z}\right) \left(-\frac{yz^2}{x}\right) \left(-\frac{zx^2}{y}\right)$$

$$= \left(-\frac{xy^2}{x^2z}\right) \left(-\frac{yz^2}{xy^2}\right) \left(-\frac{zx^2}{yz^2}\right)$$

$$= -\frac{\cancel{x^3y^3z^3}}{\cancel{x^3y^3z^3}} = -1$$

12) DE $10x^4+10x^2+4=3x^2-6$

$$\rightarrow 10x^4+10 = -7x^2$$

$$10(x^4+1) = -7x^2 \rightarrow \frac{x^4+1}{x^2} = -\frac{7}{10}$$

DESDOBLAMOS: $x^2 + \frac{1}{x^2} = -\frac{7}{10}$

SUMAMOS: $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = -\frac{7}{10} + 2$

CONOCIDO

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{13}{10}$$

13) DEL DATO: $y = x-1 \rightarrow x-y = 1$

ALCUBO: $x^3-y^3-3xy(x-y) = 1^3$

$$\sim x^3-y^3 = 1+3xy$$

SI ELEVAMOS A LA 4ª:

$$(x^3-y^3)^4 = (1+3xy)^4$$

ADemás: $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} \rightarrow \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO LOS EQUIVALENTES; SE TIENE:

$$\frac{(1+3xy)^4 + \sqrt{2}}{(1+3xy)^4 + \sqrt{2}} = 1$$

14) $\alpha = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$; $\beta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

EN β APLIQUEMOS PROPIEDAD DE PROPORCIONES:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

APLICANDO:

$$\frac{\beta+1}{\beta-1} = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{b^2+c^2-a^2-2bc}$$

$$\frac{\beta+1}{\beta-1} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b-c)^2 - a^2}$$

O TAMBIÉN:

$$\frac{\beta+1}{\beta-1} = - \frac{(b+c)^2 - a^2}{a^2 - (b-c)^2}$$

¡ESTO ES $\frac{1}{\alpha}$! (VER DATO)

$$\Rightarrow \frac{\beta+1}{\beta-1} = -\frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha\beta + \alpha = -\beta + 1$$

$$\therefore \alpha\beta + \alpha + \beta = 1$$

(15) REORDENAMOS:

$$*(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$*(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO:

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$$

$$= 2b(3a^2 + b^2)$$

SEA LO PEDIDO f :

$$\Rightarrow f = \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{3b^2 + a^2}$$

"OJO" CORRECCIÓN

REEMPLAZANDO EN EL NUMERADOR Y TRANSFORMANDO EN EL DENOMINADOR:

$$f = \frac{2b(3a^2 + b^2)}{\frac{3}{b^2} + \frac{1}{a^2}}$$

$$= \frac{2b(3a^2 + b^2) \times b^2 a^2}{3a^2 + b^2} = 2a^2 b$$

REEMPLAZANDO VALORES DE a Y b

$$\Rightarrow \text{V.N. } f = 2(\sqrt{0}, 2)^2 (\sqrt{0}, 3)^3$$

$$= 2(0, 2)(0, 3) = 0, 12$$

$$(16) \text{ SEA LO PEDIDO: } f = \frac{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}{(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})^2}$$

DESARROLLANDO:

$$f = \frac{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} + 2(a^{-1}b^{-1} + a^{-1}c^{-1} + b^{-1}c^{-1})}$$

$$= \frac{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right)}$$

$$= \frac{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} + 2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)}$$

$$\text{DE LOS DATOS: } a^3 + b^3 + c^3 = 3 \dots (1)$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = -1$$

MULTIPLICADO POR 3:

$$3(a+b)(a+c)(b+c) = -3 \dots (2)$$

(1)+(2):

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)}{\text{CONOCIDO}} = 0$$

$$(a+b+c)^3 = 0 \rightarrow a+b+c=0$$

REEMPLAZANDO ESTO EN f :

$$f = \frac{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} + 2\left(\frac{0}{abc}\right)} \therefore f = 1$$

$$(17) \text{ DE LA CONDICIÓN: } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

CONOCIDO POR LA IDENTIDAD DE GAUSS

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$$

CONOCIDO ∇

$$(a+b+c) \times \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

POR 2:

$$(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } a+b+c=0$$

∇

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

"SI LA SUMA DE CUADRADOS DE

NÚMEROS REALES VALE 0 \Rightarrow CADA SUMANDO BASE VALE 0"

$$\text{O SEA: } \underbrace{a-b=0}_{a=b}; \underbrace{b-c=0}_{b=c}; \underbrace{c-a=0}_{c=a}$$

$$\text{CONCLUSIÓN: } a=b=c$$

POR TANTO:

$$\text{LA CONDICIÓN } a^3+b^3+c^3=3abc$$

SE VERIFICA CUANDO

$$a+b+c=0 \vee a=b=c$$

CON ESTO:

$$\nabla (I) \text{ EF}; \nabla (II) \text{ EF}; \nabla (III) \text{ EF}$$

$$\therefore \underline{\text{FFF}}$$

(18) POR DIFERENCIA DE CUADRADOS, PODEMOS ESCRIBIR:

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = [(a+b)^2 + (a-b)^2][(a+b)^2 - (a-b)^2]$$

LEGENDRE

$$= 2(a^2+b^2) \times 4ab$$

$$= 8ab(a^2+b^2) \dots (\alpha)$$

$$\text{DATOS: } a+b=m; a-b=n$$

(1)

$$\cdot (1)^2: a^2+2ab+b^2=m^2$$

$$\nabla a^2+2n+b^2=m^2$$

$$\rightarrow a^2+b^2=m^2-2n$$

EN (2):

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8n(m^2-2n)$$

(19) DE LA IGUALDAD DADA, OBTENEMOS:

$$a+b+c=4; a^2+b^2+c^2=14; a^3+b^3+c^3=34$$

(1)

(2)

(3)

RECORDAMOS GAUSS (RESOLUCIÓN N° 17)

$$\nabla a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c) \times \nabla$$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

AQUÍ, LO QUE FALTARÍA CALCULAR ES

$ab+bc+ac$ PARA HALLAR abc

$$\cdot (1)^2: \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{14 \text{ (DATO)}} + 2(ab+bc+ac) = 4^2$$

14 (DATO)

$$\rightarrow 14 + 2(ab+bc+ac) = 16$$

$$\text{DE AQUÍ: } ab+bc+ac = 1$$

REEMPLAZANDO EN LA IDENTIDAD DE GAUSS:

$$34 - 3abc = (4)(14 - 1)$$

$$\nabla 34 - 3abc = 52 \rightarrow 3abc = -18$$

$$\therefore \underline{abc = -6}$$

(20) NOS PIDE EL EQUIVALENTE DE:

$$4(a-b)(a-c) + (b-c)^2$$

$$\text{SI HACEMOS: } \begin{matrix} a-c=x \\ a-b=y \end{matrix} \quad (-)$$

$$\text{RESTANDO: } b-c=x-y$$

\Rightarrow LO PEDIDO EQUIVALE A:

$$4yx + (x-y)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 4xy + \underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{TCP} \\
 &= \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{TCP} = (x+y)^2 \dots (I)
 \end{aligned}$$

PERO $x+y = 2a-b-c$
 REEMPLAZANDO EN (I):

$$\begin{aligned}
 (2a-b-c)^2 &= a^2 \\
 \text{ESTO ES } d \text{ (VER LA CONDICIÓN)}
 \end{aligned}$$

21) RECUERDE

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$
 ES UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (TCP), ENTONCES, SE DEBE CUMPLIR QUE: $b^2 = 4ac$

$$\text{NOS PIDEN: } \frac{8b^2}{ac} = \frac{8(4ac)}{ac} = 32$$

22) HAGAMOS LOS SIGUIENTES CAMBIOS:

$$\begin{cases}
 * 3x - 2y = a \\
 * 2x + 3y = b
 \end{cases} \quad (+) \Rightarrow 5x + y = a + b$$

REEMPLAZAMOS EN LA CONDICIÓN:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{4}{a+b}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$$

$$\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{TCP} = 0$$

$$\rightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } a = b$$

REPONIENDO:

$$3x - 2y = 2x + 3y \rightarrow x = 5y$$

REEMPLAZAMOS EN LO BUSCADO:

$$\begin{aligned}
 \frac{x+2y}{2x-y} &= \frac{5y+2y}{2(5y)-y} = \frac{7y}{9y} = \frac{7}{9} \\
 \text{O TAMBIÉN: } \left(\frac{9}{7}\right)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23) * x &= a^2 + a + b^2 + b + ab \\
 x &= (a^2 + ab + b^2) + (a + b) \\
 \Rightarrow x^2 &= [(a^2 + ab + b^2) + (a + b)]^2 \quad (\alpha)
 \end{aligned}$$

$$* y = a^2 - a + b^2 - b + ab$$

$$y = (a^2 + ab + b^2) - (a + b)$$

$$\Rightarrow y^2 = [(a^2 + ab + b^2) - (a + b)]^2 \quad (\beta)$$

RESTAMOS (α) Y (β) Y APLICAMOS
 LEGENDA EN EL 2º MIEMBRO:

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 4(a^2 + ab + b^2) \times (a + b)$$

LUEGO:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - y^2}{4(a^2 - b^2)} &= \frac{4(a^2 + ab + b^2)(a + b)}{4(a - b)(a^2 + ab + b^2)} \\
 &= \frac{a + b}{a - b}
 \end{aligned}$$

24) TRANSFORMANDO LO PEDIDO:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-1) \times (x^4+x^2+1)} \\
 S &= x^6 - 1
 \end{aligned}$$

$$\text{DE LA CONDICIÓN: } \frac{4}{x} + x = -2$$

$$\text{AL CUBO: } \left(\frac{4}{x} + x\right)^3 = (-2)^3$$

$$\Rightarrow \frac{64}{x^3} + x^3 + 3\left(\frac{4}{x}\right)x\left(\frac{4}{x} + x\right) = -8$$

$$\begin{aligned} \frac{64}{x^3} + x^3 - 24 &= -8 \rightarrow \frac{64}{x^3} + x^3 = 16 \\ \rightarrow 64 + x^6 &= 16x^3 \rightarrow x^6 - 16x^3 + 64 = 0 \\ &\quad \text{TCF} \\ \rightarrow (x^3 - 8)^2 &= 0 \rightarrow x^3 = 8 \\ \text{LUEGO: DE AQUI: } x^6 &= 64 \\ S &= 64 - 1 = 63 \end{aligned}$$

(25) DEL DATO: $x - 1 = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{3}$

ELEVAMOS AL CUBO:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 - 3(x)(1)(x-1) &= \frac{27}{3} - 3 - 3\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right)(\sqrt[3]{3})(x-1) \\ x^3 - 1 - 3x(x-1) &= 9 - 3 - 9(x-1) \\ x^3 - 1 - 3x^2 + 3x &= 6 - 9x + 9 \\ x^3 - 3x^2 + 12x - 16 &= 0 \end{aligned}$$

(26) * DE x : $x = \frac{3a}{2} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a}$

$\sim 2x = 3a + \frac{b^2}{a} \dots (\alpha)$

* DE y : $2y = 3b + \frac{a^2}{b} \dots (\beta)$

$(\alpha) + (\beta)$:

$$2(x+y) = 3(a+b) + \left(\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}\right)$$

$\sim 2(x+y) = \frac{3ab(a+b) + b^3 + a^3}{ab}$

COMO $ab = 32$

$\sim 64(x+y) = \frac{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}{\text{CONOCIDO}}$

$64(x+y) = (a+b)^3 \rightarrow x+y = \frac{(a+b)^3}{64}$

$(\alpha) - (\beta)$:

$$2(x-y) = 3(a-b) + \left(\frac{b^2}{a} - \frac{a^2}{b}\right)$$

$$\begin{aligned} 2(x-y) &= \frac{3ab(a-b) + b^3 - a^3}{ab}; ab = 32 \\ \sim 64(x-y) &= \frac{b^3 - a^3 - 3ab(b-a)}{\text{CONOCIDO}} \\ 64(x-y) &= (b-a)^3 \rightarrow x-y = \frac{(b-a)^3}{64} \\ \text{LUEGO:} \\ (x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} &= \left[\frac{(a+b)^3}{64}\right]^{2/3} - \left[\frac{(b-a)^3}{64}\right]^{2/3} \\ &= \left(\frac{a+b}{4}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{4}\right)^2 \\ &= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{16} \\ &= \frac{4ab}{16} = \frac{4(32)}{16} = 8 \end{aligned}$$

(27) DE LA CONDICIÓN: $\frac{x+y}{z} = -1$

DE AQUI: $x+y+z = 0$

DONDE SE VERIFICA QUE:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \dots (\alpha)$$

¡RECUÉRDALO!

OBJ: $y^3 + z^3 = 3xyz - x^3$

$y^3 + z^3 = x(3yz - x^2)$

MULTIPLICADO POR x^3 :

$$x^3y^3 + x^3z^3 = x^4(3yz - x^2)$$

LO PEDIDO SE TRANSFORMA EN:

$$f = \frac{y^6 + z^6 + x^6 - 9x^2yz^2}{x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3} = ?$$

ELEVAMOS (α) AL CUADRADO:

$$x^6 + y^6 + z^6 + 2(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3) = 9x^2y^2z^2$$

$\sim x^6 + y^6 + z^6 - 9x^2y^2z^2 = -2(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3)$

EN f : $f = \frac{-2(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3)}{x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3} = -2$

(28) TRANSFORMEMOS CADA FRACCIÓN POR SEPARADO:

$$f_1 = \frac{m(m^3 - n^3)(m^2 - mn + n^2)}{n(m-n)} \quad \text{CONOCIDO}$$

$$= \frac{m(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)}{n(m-n)}$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{m(m^4 + m^2n^2 + n^4)}{n}$$

$$f_2 = \frac{n(m^3 + n^3)(m^2 + mn + n^2)}{m(m+n)} \quad \text{CONOCIDO}$$

$$= \frac{n(m+n)(m^2-mn+n^2)(m^2+mn+n^2)}{m(m+n)}$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{n(m^4 + m^2n^2 + n^4)}{m}$$

$$\text{Luego: } f_1 - f_2 = ?$$

$$\left(\frac{m^5}{n} + m^3n + mn^3\right) - \left(m^3n + mn^3 + \frac{n^5}{m}\right)$$

$$= \frac{m^5}{n} + \cancel{m^3n} + \cancel{mn^3} - \cancel{m^3n} - \cancel{mn^3} - \frac{n^5}{m}$$

$$\therefore f_1 - f_2 = \frac{m^5}{n} - \frac{n^5}{m}$$

$$(29) S^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + S)^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)) (x^2 + y^2 + z^2)$$

HAGAMOS:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a \wedge xy + xz + yz = b$$

$$\Rightarrow S^2 = (a + S)^2 - (a + 2b)(a)$$

$$S^2 = a^2 + 2aS + S^2 - a^2 - 2ab$$

$$\text{DE AQUÍ: } 2aS = 2ab \rightarrow S = b$$

REPONIENDO:

$$S = xy + xz + yz$$

$$(30) (a+b+c)(a+b+c+1) + (a+b-c) \times (a+b-c-1) + (a-b-c)(a-b-c+1) + (a-b+c)(a-b+c-1)$$

CORRECCIÓN DE SIGNOS

EFFECTUANDO ADECUADAMENTE:

$$(a+b+c)^2 + (a+b+c) + (a+b-c)^2 - (a+b-c) + (a-b-c)^2 + (a-b-c) + (a-b+c)^2 - (a-b+c)$$

$$= (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b-c)^2 + (a-b+c)^2$$

$$= (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b-c)^2 + (a-b+c)^2$$

$$+ a+b+c-a-b+c+a-b-c-a+b+c$$

$$\text{ESTO SE REDUCE A 0.}$$

$$= 2[(a+b)^2 + c^2] + 2[(a-b)^2 + c^2]$$

$$= 2[(a+b)^2 + (a-b)^2 + 2c^2]$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 2 \times 2(a^2 + b^2 + c^2) = 4(2) = 8$$

$$\text{DOJO: } 2$$

(31) OBSÉRVESE EN CADA CORCHETE:

PUEDA APLICAR LA IDENTIDAD

LEGENDRE; SE TENDRÁ:

$$[4ab][4a^2b^2][4a^3b^3] \dots [4a^n b^n]$$

$$n \text{ CORCHETES}$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 4 \dots 4 \cdot (ab)(ab^2)(ab^3) \dots (ab^n)$$

$$n \text{ VECES}$$

$$= 4^n \cdot (ab)^{1+2+3+\dots+n}$$

$$= 4^n \cdot (ab)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= 4^n \cdot (ab)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{O TAMBIÉN: } [4(ab)^{\frac{n+1}{2}}]^n$$

DIVISIÓN POLINOMIAL

IV

CAPÍTULO

Algebra

01. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$

$Q(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$

$= (x-3)(x^2-1)$

$= x^3 - 3x^2 - x + 3$

COMO $f(x)$ ES DIVISIBLE POR $Q(x)$

LA DIVISIÓN ES EXACTA, POR TANTO, EL RESTO ES IDÉNTICAMENTE NULO ($R(x) \equiv 0$)

* DIVIDAMOS POR HORNER:

| 1 | 1 | -2 | -6 | m | n | p |
|----|---|----|----|----|----|---|
| 3 | | 3 | 1 | -3 | | |
| 1 | | | 3 | 1 | -3 | |
| -3 | | | | -6 | -2 | 6 |
| | 1 | 1 | -2 | 0 | 0 | 0 |

DIV. EXACTA

DEL ESQUEMA:

* $m-8=0 \rightarrow m=8$

* $n-5=0 \rightarrow n=5$

* $p+6=0 \rightarrow p=-6$

$\therefore m \cdot n \cdot p = -240$

02. DIVIDIENDO POR HORNER:

| 1 | 2 | -3 | (a+b) | (b-3a+2) | (3ab-3b^2-3b+20) |
|----|---|----|---------|----------|------------------|
| 1 | | 2 | -2b | | |
| -b | | | -1 | b | |
| | | | | (a-b-1) | (-2ab+b^2+b) |
| | 2 | -1 | (a-b-1) | (b-2a+1) | (2ab-2b^2-2b+20) |

DE AQUÍ:

$R(x) \equiv 0$

* $b-2a+1=0 \rightarrow$ POR b : $b^2-2ab+b=0 \dots (1)$

* $2ab-2b^2-2b+20=0 \dots (2)$

(1)+(2): $-b^2-b+20=0$

LUEGO: $b^2+b-20=0$

$b \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow -4 \end{matrix}$

$\Rightarrow (b+5)(b-4)=0$

* $b=-5 \vee b=4$

OBSÉRVESE: $b-2a+1=0$

* CON $b=-5 \rightarrow a=-2 \checkmark$

* CON $b=4 \rightarrow a=5/2 \notin \mathbb{Z}$

$\therefore a=-2; b=-5$

03. RECUERDE

SI LA DIVISIÓN ENTRE DOS POLINOMIOS ES EXACTA, ENTONCES SE PUEDE REALIZAR LA OPERACIÓN DE DIVISIÓN ORDENÁNDOLOS EN FORMA ASCENDENTE.

APLIQUEMOS EN EL PROBLEMA, DIVIDAMOS POR HORNER:

| -4 | 8 | -18 | 9 | c | b | a |
|----|----|-----|----|----|----|-----|
| -3 | | 6 | 4 | | | |
| -2 | | | -9 | -6 | | |
| | | | | 3 | 2 | |
| | | | | | 3M | -2M |
| | -2 | 3 | -1 | M | 0 | 0 |

DIV. EXACTA

DEL ESQUEMA:

* $M = \frac{c-3}{-4}$

* $a-2M=0 \rightarrow a-2\left(\frac{c-3}{-4}\right)=0$

$\rightarrow a + \frac{c-3}{2} = 0$

$\rightarrow 2a+c=3 \dots (\alpha)$

* $b+2-3M=0$

$\rightarrow b+2-3\left(\frac{c-3}{-4}\right)=0$

DE AQUÍ: $4b+3c=1 \dots (\beta)$

$$(\alpha) + (\beta): 2a + 4b + 4c = 4$$

$$(\div 4): \frac{a}{2} + b + c = 1$$

04 CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

SI LA SUMA DE COEFICIENTES
DEL COCIENTE EN LA

EFFECTUAMOS LA DIVISIÓN TE-
NIENDO EN CUENTA EL RECUE-
DE ANTERIOR (RESOL. 3)

| | | | | | | |
|----|---|----|-----------------|--|----|----|
| 3 | 9 | -6 | a | | b | -c |
| -1 | | -3 | 6 | | | |
| 2 | | | 3 | | -6 | |
| | | | | | -3 | 6 |
| | 3 | -3 | $\frac{a+9}{3}$ | | 0 | 0 |

3 DIV. EXACTA

DE AQUÍ:

$$\# \frac{a+9}{3} = 3 \rightarrow a = 0$$

$$\# b - 9 = 0 \rightarrow b = 9$$

$$\# -c + 6 = 0 \rightarrow c = 6$$

$$\therefore a^2 - (b-c)^2 = 0^2 - 3^2 = -9$$

05 DIVIDIMOS POR HORNER:

| | | | | | | | |
|----|---|---|-------|-----|--|--------|-----|
| 1 | 2 | 3 | b | 6b | | 1 | 2 |
| 1 | | 2 | -2b | | | | |
| -b | | | 5 | -5b | | b^2-5b | |
| | | | | 5-b | | 5 | -5b |
| | 2 | 5 | (5-b) | 5 | | 2 | 3 |

R(x)

DEL ESQUEMA:

$$\# \sum \text{coef.}(q) = 17 - b > 15 \text{ (DATO)}$$

$$\rightarrow b < 2$$

$$\# b^2 - 5b + 6 = 2 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$\rightarrow (b-4)(b-1) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } b=4 \quad ; \quad b=1 \quad (b < 2)$$

X ✓

$$\# a - 5b = 3 \rightarrow a - 5 = 3 \rightarrow a = 8$$

$$\therefore ab = (8)(1) = 8$$

06 DIVIDIMOS POR HORNER; TEN- GASE EN CUENTA EL RECUE- DE LA RESOL. 3.

| | | | | | | | |
|-----|--|--------|-------|----|--|-----|----|
| a-2 | | 3(a-2) | (a-8) | b | | -11 | 5 |
| a | | | 3a | -3 | | | |
| -1 | | | | 4a | | -4 | |
| | | | | | | M | -M |
| | | 3 | 4 | M | | 0 | 0 |

DIV. EX.

DEL ESQUEMA:

$$\# 5 - M = 0 \rightarrow M = 5$$

$$\# -15 + M(a) = 0 \rightarrow 5a = 15 \rightarrow a = 3$$

$$\# \frac{b-3+4a}{a-2} = M \rightarrow \frac{b+9}{a-2} = 5$$

$$b = -4$$

$$\therefore a+b = -1$$

07 CORRECCIÓN: b. PAR

DEL ESQUEMA:

$$\# \frac{n}{2} = m \dots (1)$$

$$\# mc = 3m \rightarrow c = 3$$

$$\# \frac{2b-bm}{2} = p \dots (2)$$

$$\# 4m - bp = n \dots (3)$$

$$\# a + cp = a \rightarrow 3p = 0 \rightarrow p = 0$$

$$\text{EN (2): } 2b - bm = 0 \rightarrow 2a = bm$$

$$\rightarrow m=2 ; \underline{EW(3)}: 8-0=n \rightarrow n=8 ; \underline{EW(1)}: \frac{8}{2}=2 \rightarrow d=4$$

Exmp: Obf. $\text{divisor} = 2x^2 + bx - c \rightarrow \text{divisor} = 4x^2 + bx - 3$

Como $n > b > a \rightarrow 8 > b > 4$ y siendo b par $\Rightarrow b = 6$

\therefore El divisor es: $d(x) = 4x^2 + 6x - 3$

08) DIVIDAMOS LOS POLINOMIOS POR HORNER (COMPLÉTESE EL DIVIDENDO); OBSÉRVESE: $d(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

"Q" TÉRMINOS

[illegible]

Por isto: $\sum \text{coef. de } q [q(1)] = \sum \text{coef. de } R [R(1)]$

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2} = -15 + 400$$

$$\frac{2(2+1)(2+1)}{6} = 385 \rightarrow 2(2+1)(2+1) = 10 \times 11 \times 21$$

IDENTIFICANDO: $a = 10 \therefore \text{TÉRMINO PRINCIPAL DEL } Q = a^2 x^{a-1} = \underline{100x^9}$

⑨ CBS: $d(x) = -2x - 1$

DIVIDIMOS POR RUFFINI, COMPLETÉSE EL DIVIDENDO:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 16 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & \downarrow & -8 & 4 & -2 & 0 \\ \hline & 16 & -8 & 4 & 0 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \div(-2) & -8 & 4 & -2 & 0 & \text{COEF} \end{array}$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$*_{(3)} - 1 = -8 \rightarrow \varphi = -21$$

$$\diamond * \frac{b}{4} - 2 = 4 \rightarrow b = 24$$

$$\diamond \neq \frac{c}{5} - 3 = -2 \rightarrow c = 5$$

$$\diamond \neq \frac{d}{f} - 4 = 0 \rightarrow d = 24$$

$$\therefore 215 + C - d = -16$$

10) DIVIDAMOS POR RUFFINI (COMPLÉTESE EL DIVIDENDO):

$$\begin{array}{r|l}
 & n \text{ TÉRMINOS} \\
 (a-b) & \overbrace{(a-b) \cdot (a-b)^2 \cdot (a-b)^3 \cdot \dots \cdot (a-b)^n \cdot (a-b)^{n+1}} \\
 & \downarrow \quad (a-b)^2 \quad 2(a-b)^3 \quad \dots \quad n(a-b)^{n+1} \\
 & (a-b) \quad 2(a-b)^2 \quad 3(a-b)^3 \quad \dots \quad n(a-b)^n \quad \parallel (n+1)(a-b)^{n+1}
 \end{array}$$

Por condición:

$$(n+1)(a-b)^{n+1} = (n+1)(4b)^{n+1}$$

$$\text{DE AQUÍ: } a-b=4b \rightarrow a=5b$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 5$$

11) DEL ESQUEMA:

$$* 2n=3$$

$$* 4n=m \dots (1)$$

$$* b+m=5 \dots (2)$$

$$* 5n=10 \rightarrow n=2$$

$$* 12n=p \rightarrow p=24$$

$$* c+p=1 \rightarrow c=-23$$

$$* 3+n=q \rightarrow q=5$$

$$\text{EN (1): } 4(2)=m \rightarrow m=8$$

$$\text{EN (2): } b+8=5 \rightarrow b=-3$$

LUEGO:

$$2n+b+c+m+n+p+q =$$

$$= 3-3-23+8+2+24+5 = 16$$

12) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\frac{512x^9-1}{2x-1} = \frac{(2x)^9-1}{(2x)-1}$$

LA DIVISIÓN MOSTRADA DA UN COCIENTE NOTABLE; ASÍ:

$$Q(x) = (2x)^8 + (2x)^7 + (2x)^6 + \dots + 1$$

CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

HALE EL COCIENTE

LUEGO:

$$\sum \text{COEF.}(Q) = Q(1) = \frac{2^8+2^7+2^6+\dots+1}{\text{ES C.N.}}$$

$$= \frac{2^9-1}{2-1}$$

$$\therefore \sum \text{COEF.}(Q) = 511$$

13) POR T.R.: $x-2n+1=0$

$$\rightarrow x=2n-1$$

EN EL DIVIDENDO:

$$R = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2$$

SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS n PRIMEROS NÚMEROS NATURALES.

$$\therefore R = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

14) POR T.R.: $x+1=0 \rightarrow x=-1$

EN EL DIVIDENDO:

$$\text{RESTO} = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 2(-1)^2 - \frac{2}{5}(-1) + \frac{1}{5}$$

$$\text{RESTO} = 1 - 3 + 2 - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 2 \text{ (DATO)}$$

DE AQUÍ: $a^2 + b^2 = 2ab$

$\rightarrow (a-b)^2 = 0 \rightarrow a = b$

EN LO PEDIDO:

$$\frac{3a^5 + 4b^5}{ab(a^3 + b^3)} = \frac{3a^5 + 4a^5}{a^2(a^3 + a^3)} = \frac{7a^5}{2a^5} = \frac{7}{2}$$

15) POR T.R.: $x^2 - 2x + 2 = 0$

$\rightarrow (x^2) = 2x - 2$

TRANSFORMEMOS EL DIVIDENDO:

$$D = [(x^2)^4 + 16]^4 + (x^2)^6 x + 4(x^2)^2 - 1024^2$$

REEMPLAZANDO, AQUÍ:

$$R' = [(2x - 2)^4 + 16]^4 + (2x - 2)^6 x + 4(2x - 2)^2 - (2^{10})^2$$

OJO: LO OBTENIDO, NO ES EL RESTO BUSCADO (SUPERA EN GRADO, AL GRADO DEL DIVISOR).

$$R' = [16(x-1)^4 + 16]^4 + 64(x-1)^6 x + 16(x-1)^2 - 2^{20}$$

$$R' = [16(x^2 - 2x + 1)^2 + 16]^4 - 64(x^2 - 2x + 1)^3 x + 16(x^2 - 2x + 1) - 2^{20}$$

REEMPLAZANDO (x^2) POR SU EQUIVALENTE, SE TIENE:

$$R = [16(-1)^2 + 16]^4 - 64(-1)^3 x + 16(-1) - 2^{20} = (32)^4 + 64x - 16 - 2^{20} = 2^{20} + 64x - 16 - 2^{20}$$

$\therefore R(x) = 64x - 16$

16) NOS PIDEN EL RESTO DE $\frac{x^{15} + x^{14} + x^{13} + \dots + x^3 + x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2+1)}$

PARA ELLO, MULTIPLÍQUEMOS DIVIDENDO Y DIVISOR POR $(x-1)$, PARA QUE EL DIVISOR SE TRANSFORME EN BINOMIO.

$$\frac{x^{15} + x^{14} + x^{13} + \dots + x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2+1)} \times \frac{x-1}{x-1}$$

EFFECTUANDO SE TIENE:

$$\frac{x^{16} - 1}{x^4 - 1}$$

AQUÍ, POR T.R.: $x^4 - 1 = 0 \rightarrow x^4 = 1$

DEL DIVIDENDO:

$$D = (x^4)^2 - 1$$

$\rightarrow R' = 1^2 - 1 \rightarrow R' = 0$ (ÉSTE ES RESTO DE LA NUEVA DIVISIÓN)

LUEGO, PARA HALLAR EL RESTO DE LA DIVISIÓN INICIAL, A ESTE RESTO SE LE DEBE DIVIDIR POR $(x-1)$

$$\rightarrow R_{\text{BUSCADO}} = \frac{R'}{x-1} \therefore R = 0$$

17) SIMILAR AL PROBLEMA ANTERIOR, MULTIPLICAMOS AL DIVIDENDO Y AL DIVISOR POR $(x+1)$

$$\frac{(x-1)(x^2+1)(x^4+1)\dots(x^{64}+1)}{x^2+x+1} \times \frac{x+1}{x+1}$$

EFFECTUANDO; EN EL NUMERADOR TRANSFORMAMOS LA SUMA POR DIFERENCIA (SUCESIVAMENTE) EN DIFERENCIA DE CUADRADOS; SE OBTENDRÁ:

$$\frac{x^{128} - 1}{x^3 + 1}$$

AQUÍ; POR T.R.: $x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1$

DEL DIVIDENDO:

$$D = (x^3)^{42} - 1$$

$$\rightarrow R' = (-1)^{42} - 1 \rightarrow R' = 0$$

LUEGO: $R_{\text{BUSCADO}} = \frac{R'}{x+1}$
 $= \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$
 $\therefore R(x) = \underline{x-1}$

18) $P(x) \div (x^2+5) \rightarrow Q(x) \wedge R(x) = 2x-5$
 DE AQUÍ; POR IDENTIDAD FUNDAMENTAL: \therefore
 $P(x) \equiv (x^2+5)Q(x) + 2x-5 \dots (I)$

++ NOS PIDEN EL RESTO DE DIVIDIR $P(x) \div (x+2)$; ES DECIR:

$$R = P(-2) = ?$$

+++ ADEMÁS EL RESTO DE DIVIDIR $Q(x) \div (x+2)$, ES 4, ES DECIR:

$$Q(-2) = 4$$

EN (I); HALLEMOS $P(-2)$:

$$P(-2) \equiv (4+5)Q(-2) + 2(-2) - 5$$

$$\equiv 9(4) - 4 - 5$$

$$\therefore R = P(-2) = \underline{27}$$

19) $P(x) \div (x^3+2) \rightarrow R(x) = 2x^2+5x+2$
 POR LA IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$$

$$P(x) \equiv (x^3+2)Q(x) + (2x^2+5x+2) \dots (I)$$

NOS PIDEN EL RESTO DE DIVIDIR

$P(x) \div (x+2)$; ES DECIR:

$$R = P(-2) = ?$$

EN (I), HALLEMOS $P(-2)$:

$$P(-2) \equiv (-2^3+2)Q(-2) + 2(-2)^2 + 5(-2) + 2$$

$$\therefore R = P(-2) = \underline{2(2^2-6+1)}$$

20) IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$$

OBJ: $R(x)$ ES EL RESTO DE DIVIDIR $D(x)$ ENTRE $d(x)$

DONDE: $\text{GRADO}(R) < \text{GRADO}(d)$

EN EL PROBLEMA:

$$P(x) \div (x+2)^3 \rightarrow R(x) = 2x^2+7x-3$$

$$P(x) \equiv (x+2)^3 Q(x) + (2x^2+7x-3) \dots (I)$$

(i) NOS PIDEN EL RESTO DE DIVIDIR

$$P(x) \div (x+2), \text{ ES DECIR: } R_1 = P(-2)$$

EN (I), HALLEMOS $P(-2)$

$$P(-2) = 0^3 Q(-2) + 2(-2)^2 + 7(-2) - 3$$

$$\therefore R_1(x) = \underline{-9}$$

(ii) NOS PIDEN EL RESTO DE DIVIDIR

$$P(x) \div (x+2)^2$$

DE (I); ESCRIBIMOS:

$$P(x) \equiv (x+2)^3 Q(x) + 2x^2+7x-3 = x-11$$

$$\equiv (x+2)^3 Q(x) + 2(x+2)^2 + (-x-11)$$

FACTORIZO $(x+2)^2$:

$$P(x) \equiv \underbrace{(x+2)^2}_{D} \underbrace{[(x+2)Q(x)+2]}_Q + \underbrace{(-x-11)}_R$$

OBJ: $R = -x-11$, ES EL RESTO DE DIVIDIR $P(x) \div (x+2)^2$

$$R = R_2(x) = \underline{-x-11}$$

$$\therefore R_1(x) + R_2(x) = \underline{-x-20}$$

21) $P(x) \div (x^2-3) \rightarrow Q(x); R(x) = 5x-2$

$$P(x) \equiv (x^2-3)Q(x) + (5x-2) \dots (1)$$

ADEMÁS:

$$* Q(x) \div (x+3) \rightarrow Q_1(x); R(x) = -2$$

DE AQUÍ:

$$Q(x) \equiv (x+3)Q_1(x) + (-2) \dots (2)$$

(2) EN (1):

$$P(x) \equiv (x^2-3)[(x+3)Q_1(x) - 2] + (5x-2)$$

$$P(x) \equiv (x^2-3)(x+3)Q_1(x) + (-2x^2+6+5x-2)$$

$$P(x) \equiv (x^2-3)(x+3)Q_1(x) + (-2x^2+5x+4)$$

∴ EL RESTO DE DIVIDIR.

$$P(x) \div (x^2-3)(x+3) \equiv -2x^2+5x+4$$

(22) * $P(x) \div (x+n)^4$, DA COMO COCIENTE

$$Q(x) \text{ y RESTO } R(x) = x^3 - 3n^2x + 2n^3$$

$$P(x) \equiv (x+n)^4 Q(x) + (x^3 - 3n^2x + 2n^3) \dots (I)$$

NOS PIDEN EL RESTO DE DIVIDIR

$P(x) \div (x+n)^2$; PARA ESTO, DIVIDAMOS

$R(x) \div (x+n)^2$

VEAMOS:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 3n^2x + 2n^3 & x^2 + 2nx + n^2 \\ -x^3 - 2nx^2 - n^2x & x - 2n \\ \hline -2nx^2 - 4n^2x + 2n^3 & \\ 2nx^2 + 4n^2x + 2n^3 & \\ \hline 4n^3 & \end{array}$$

DE AQUÍ, DECIMOS:

$$x^3 - 3n^2x + 2n^3 \equiv (x+n)^2(x-2n) + 4n^3$$

EN (I):

$$P(x) \equiv (x+n)^4 Q(x) + (x+n)^2(x-2n) + 4n^3$$

$$P(x) \equiv (x+n)^2[(x+n)^2 Q(x) + (x-2n)] + 4n^3$$

VEAMOS QUE:

EL RESTO DE DIVIDIR

$$P(x) \div (x+n)^2 \equiv 4n^3$$

$$(23) * P(x) \div (x-2)^{12} \rightarrow R(x) = 4x^2 - x - 1$$

DE AQUÍ, POR IDENT. FUNDAMENTAL:

$$P(x) \equiv (x-2)^{12} Q(x) + (4x^2 - x - 1) \dots (I)$$

NOS PIDEN EL RESTO DE $P(x) \div (x-2)$,

ES DECIR, LO QUE PIDEN ES $P(2) = R$

EN (I):

$$R = P(2) = 0^2 Q(2) + 4(4) - (2) - 1$$

$$\therefore R = P(2) = 13$$

(24) NOS PIDEN EL RESTO DE DIVIDIR

$$(x+2)^4(x+6)(x-3)$$

$$(x+2)^3(x+3)$$

PARA ELLO, DIVIDIMOS DIVIDENDO

Y DIVISOR POR $(x+2)^3$, NOS

QUEDARÁ ASÍ:

$$\frac{(x+2)^4(x+6)(x-3)}{(x+2)^3} = \frac{(x+2)(x+6)(x-3)}{x+3}$$

AQUÍ, POR T.R.: $x+3=0 \rightarrow x=-3$

EN EL DIVIDENDO:

$$R' = (-3+2)(-3+6)(-3-3)$$

$\rightarrow R' = 18$ (ÉSTE ES EL RESTO DE LA NUEVA DIVISIÓN)

LUEGO, PARA HALLAR EL RESTO DE LA DIVISIÓN INICIAL, A ESTE RESTO SE LE DEBE MULTIPLICAR

Por $(x+2)^3$.

$$\hookrightarrow R_{\text{BUSCADO}} = R' \cdot (x+2)^3$$

$$\therefore R(x) = 18(x+2)^3$$

25) * $P(x) \rightarrow$ es de 4º GRADO

$$* P(x) \div (x^2+x+1) \rightarrow R(x) = 3x-5$$

$$* P(x) \div (x^2-x+2) \rightarrow R(x) = 3x-5$$

$$* P(x) \div (x+1) \rightarrow R = P(-1) = 12$$

NOS PIDEN: $P(0) = ?$

Por PROPIEDAD:

$$P(x) \div (x^2+x+1)(x^2-x+2) \rightarrow R(x) = 3x-5$$

Por LA IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$P(x) \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+2)Q(x) + (3x-5)$$

4º G

4º GRADO

TIENE Q' SER
DE GRADO 0.

OSEA QUE: $Q(x)$ es UNA CTE.

LUEGO:

$$P(x) \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+2)A + (3x-5)$$

ahí, HALEMOS $P(-1)$:

$$P(-1) = (1)(4)A + (-8) = 12 \text{ (DATO)}$$

$$\rightarrow 4A = 20 \rightarrow A = 5$$

$$\hookrightarrow P(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+2)(5) + (3x-5)$$

ahí:

$$P(0) = (1)(2)(5) + (-5) = 5$$

26) P.

$$\frac{x^4 - ax + a}{(x-m)(x-n)(x-p)(x-q)}$$

es una DIVISIÓN EXACTA, ENTON
CES:

$$x^4 - ax + a \equiv (x-m)(x-n)(x-p)(x-q) \cdot M(x)$$

DE ACUERDO A LOS GRADOS, PODEMOS CONCLUIR QUE:

$M(x)$ es DE GRADO 0 $\hookrightarrow M(x)$ es CTE.

ADemás COMO SE TRATA DE POLINOMIOS IDÉNTICOS, "LOS COEFICIENTES DE SUS TÉRMINOS SEMEJANTES EN AMBOS DEBEN SER IGUALES"

Por tanto: $M(x) = 1$

Efectuando en LA IDENTIDAD:

$$x^4 - ax + a \equiv x^4 (m+n+p+q)x^3 +$$

$$+ (mn+...)x^2 - (mnp+mnpq+mpq)$$

$$+ npq)x + mnpq$$

DE aquí:

$$* mnp + mnq + mpq + npq = a$$

$$* mnpq = a$$

NOS PIDEN EL RESIDUO DE DIVIDIR:

$$\frac{x^4 - ax + a}{x - \frac{npq + mpq + mnq + mnp}{mnpq}}$$

O TAMBIÉN:

$$\frac{x^4 - ax + a}{x - \frac{a}{a}} = \frac{x^4 - ax + a}{x - 1}$$

ahí; POR T.R.: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

REEMPLAZANDO EN EL DIVIDENDO:

$$\hookrightarrow R = (1)^4 - a(1) + a \therefore R = 1$$

27) HALEMOS EL RESTO DE DIVIDIR.

$$\frac{x^{3a+2} + x^{3b+1} + mx^{3c}}{x^2 + x + 1}$$

HAGAMOS ALGO SIMILAR A LA RESOLUCIÓN 16 (REVISE).

$$\frac{x^{3a+2} + x^{3b+1} + mx^{3c}}{x^2 + x + 1} \times \frac{x-1}{x-1}$$

$$\frac{x^{3a+3} + x^{3b+2} + mx^{3c+1} - x^{3a+2} - x^{3b+1} - mx^{3c}}{x^3 - 1}$$

HALLEMOS EL RESTO DE ESTA NUEVA DIVISIÓN.

$$\text{POR T.R.: } x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1$$

BUSQUEMOS x^3 EN EL DIVIDENDO:

$$D = (x^3)^{a+1} + (x^3)^b \cdot x^2 + m(x^3)^c \cdot x$$

$$- (x^3)^a \cdot x^2 - (x^3)^b \cdot x - m(x^3)^c$$

REEMPLAZANDO, TENEMOS:

$$R' = 1 + x^2 + mx - x^2 - x - m$$

$$\hookrightarrow R' = (m-1)x - (m-1)$$

$$R' = (m-1)(x-1)$$

LUEGO:

$$R_{\text{BUSCADO}} = \frac{R'}{x-1} \Rightarrow R = m-1$$

PERO COMO LA DIVISIÓN ES EXACTA

$$\hookrightarrow R = m-1 = 0 \therefore m = 1$$

(28) APLÍQUEMOS ALGO MÁS SIMPLIFICADO. USTED REALICE LA 2ª FORMA APLICANDO RUFFINI.

RECUERDE

SI EL POLINOMIO $f(x)$ ES DIVISIBLE POR $(x-1)^3$, ENTONCES, SE CUMPLE:

$$f(1) = 0; f'(1) = 0; f''(1) = 0$$

DOUDE:

$$* f' \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ DERIVADA DE } f$$

$$* f'' \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ DERIVADA DE } f$$

APLIQUEMOS:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} - cx + 1$$

$$* f'(x) = anx^{n-1} + b(n-1)x^{n-2} - c$$

$$* f''(x) = an(n-1)x^{n-2} + b(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

DE AQUÍ:

$$* f(1) = a + b - c + 1 = 0 \dots (1)$$

$$* f'(1) = an + b(n-1) - c = 0 \dots (2)$$

$$* f''(1) = an(n-1) + b(n-1)(n-2) = 0$$

$$\rightarrow an + b(n-2) = 0 \dots (3)$$

$$(*) (2) - (3): b - c = 0 \rightarrow b = c$$

$$(*) (1) \times n - (2):$$

$$\begin{array}{r} an + bn - cn + n = 0 \\ an + b(n-1) - c = 0 \end{array} \quad (-)$$

$$\searrow b - cn + c + n = 0$$

$$\downarrow c - cn + c + n = 0$$

$$c(2-n) + n = 0$$

$$n = c(n-2) \therefore c = \frac{n}{n-2}$$

(29) SEA $P(x)$ DE GRADO 3 y COEFICIENTES ENTEROS.

* SI AL DIVIDIR $P(x)$ POR $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-4)$ SEPARADAMENTE SE OBTIENE EL MISMO RESTO 10, ENTONCES, CUANDO SE DIVIDA $P(x)$ POR EL PRODUCTO DE ELLOS, EL RESTO TAMBIÉN SERÁ 10 (PROPIEDAD).

* ADEMÁS: $P(-1) = 0$ (DATO)

POR IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$\underbrace{P(x)}_{3^{\text{er}} \text{ G.}} \equiv \underbrace{(x-1)(x+2)(x-4)}_{3^{\text{er}} \text{ G.}} \underbrace{Q(x)}_{\downarrow} + 10$$

TIENE Q' SER
DE GRADO CERO

OFERQUE: $Q(x)$ ES UNA CTE.

LUEGO:

$$P(x) \equiv (x-1)(x+2)(x-4)A + 10$$

AQUÍ:

$$P(-1) = (-2)(1)(-5)A + 10 = 0$$

$$10A = -10 \rightarrow A = -1$$

$$\hookrightarrow P(x) = -(x-1)(x+2)(x-4) + 10$$

EFFECTUANDO:

$$P(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x + 2$$

30) APLÍQUEMOS EL RECUERDE
DE LA RESOLUCIÓN 3 (REVISE)

• COMPLETÉSE EL DIVIDENDO:

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | b | a |
| 2 | | 2 | -1 | | | | | | | | |
| -1 | | | 4 | -2 | | | | | | | |
| | | | | 6 | -3 | | | | | | |
| | | | | | 8 | -4 | | | | | |
| | | | | | | 10 | -5 | | | | |
| | | | | | | | 12 | -6 | | | |
| | | | | | | | | 14 | -7 | | |
| | | | | | | | | | 16 | -8 | |

Obs:

$$*b + 0 = 0 \therefore b = -9$$

31) PARA QUE $P(x)$ SEA DIVISIBLE

✦ POR $(x-1)^2(cx+d)$, ES NECESARIO

✦ QUE $P(x)$ SEA DIVISIBLE POR $(x-1)^2$.

✦ \hookrightarrow DIVIDAMOS $P(x)$ POR $(x-1)$, DOS

✦ VECES CONSECUTIVAS. PRIMERO

✦ $P(x)$ ENTRE $(x-1)$ y, LUEGO, EL

✦ COCIENTE DE ESTA DIVISIÓN EN-

✦ TRE $(x-1)$; EN AMBOS CASOS EL

✦ RESTO DEBE SER CERO. ASÍ (COM-

✦ PLETESE EL DIVIDENDO):

n TÉRMINOS

| | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|-----|----|-----|-----|
| | a | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | b | 1 |
| 1 | ↓ | a | a | a | ... | a | a | a+b |
| | a | a | a | a | ... | a | a+b | 0 |
| 1 | ↓ | a | 2a | 3a | ... | na | | |
| | a | 2a | 3a | 4a | ... | na | 0 | |

DEL ESQUEMA:

$$*a+b+1=0 \dots (1)$$

$$*a+b+na=0 \dots (2)$$

$$(2)-(1): na-1=0 \rightarrow a = \frac{1}{n}$$

$$\text{EN (1): } \frac{1}{n} + b + 1 = 0 \rightarrow -b = \frac{n+1}{n}$$

$$\text{DE AQUÍ: } b = -\frac{n+1}{n}$$

32) EFFECTUEMOS LA DIVISIÓN POR
HORNER (COMPLETÉSE EL DIVI-

$$\text{DENDO)} \quad \text{OBS: } d(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

| | | | | | |
|-------|---|--------|-------|-----|----|
| 1 | 1 | -m | 0 | n | -p |
| 3q | | 3q | -3q^2 | q^3 | |
| -3q^2 | | | A | B | C |
| q^3 | | | | | |
| | 1 | (3q-m) | 0 | 0 | 0 |

$R(x) \equiv 0$

$$\begin{aligned} \text{OJO: } *A &= 3q(3q-m) \\ *B &= -3q^2(3q-m) \\ *C &= q^3(3q-m) \end{aligned}$$

DEL ESQUEMA:

$$\begin{aligned} * -3q^2 + 3q(3q-m) &= 0 \\ \rightarrow 3q(3q-m) &= 3q^2 \rightarrow m = 2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * n + q^3 - 3q^2(3q-m) &= 0 \\ \rightarrow n + q^3 &= 3q^2(q) \rightarrow n = 2q^3 \end{aligned}$$

LUEGO:

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot \sqrt{mn}}{n} &= \frac{2q \cdot \sqrt{4q^4}}{2q^3} = \frac{2q(2q^2)}{2q^3} \\ &= \frac{2}{1} \end{aligned}$$

$$(33) * F(x) \div (x-1-\sqrt{2}) \rightarrow q(x); R=1$$

$$\hookrightarrow F(x) \equiv (x-1-\sqrt{2})q(x) + 1 \dots (1)$$

$$* F(x) \div (x-1+\sqrt{2}) \rightarrow q(x); R=\sqrt{2}$$

$$\hookrightarrow F(x) \equiv (x-1+\sqrt{2})q(x) + \sqrt{2} \dots (2)$$

NOJ PDEM: EL RESTO DE DIVIDIR.

$$F(x) \div (x-1); \text{ OSEA } F(1) = ?$$

$$\cdot \text{DE (1): } F(1) = (-\sqrt{2})q(1) + 1 \quad (\alpha)$$

$$\cdot \text{DE (2): } F(1) = (\sqrt{2})q(1) + \sqrt{2} \quad (\beta)$$

$$\cdot (\alpha) = (\beta): (-\sqrt{2})q(1) + 1 = (\sqrt{2})q(1) + \sqrt{2}$$

$$\text{DE AQUÍ: } q(1) = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cdot \text{EN } (\beta): F(1) = \sqrt{2} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2}$$

$$\therefore F(1) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$(34) * (P(x)-2x+1) \div (x-5)^2 \rightarrow R=3x-15$$

FOR IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$P(x)-2x+1 \equiv (x-5)^2 q(x) + (3x-15)$$

$$\hookrightarrow P(x) \equiv (x-5)^2 q(x) + 5x-16$$

O TAMBIÉN:

$$P(x) \equiv (x-5)^2 q(x) + 5(x-5) + 9$$

FACTORIZAMOS (x-5):

$$P(x) \equiv \underbrace{(x-5)}_D \underbrace{[(x-5)q(x)+5]}_d + \underbrace{9}_R$$

OBJ: * AL DIVIDIR P(x) ENTRE (x-5) EL RESTO ES 9. (α)

$$* (P(x)+x+1) \div (x^2+5x+25) \rightarrow R=x+10$$

Por IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$P(x)+x+1 \equiv (x^2+5x+25)q(x) + (x+10)$$

$$\hookrightarrow P(x) \equiv \underbrace{(x^2+5x+25)}_D \underbrace{q(x)}_d + \underbrace{(x+10)}_R$$

OBJ: * AL DIVIDIR P(x) ENTRE (x^2+5x+25) EL RESTO ES 9 (β)

DE (α) y (β), APLICANDO PROPIEDAD, EL RESTO DE DIVIDIR P(x)

ENTRE EL PRODUCTO DE (x-5)(x^2+5x+25) TAMBIÉN ES 9

$$\therefore P(x) \div (x^3-125) \text{ DA RESTO } 9$$

$$(35) \frac{(x-3)^{11} + (x-4)^3}{(x-3)(x-4)} \rightarrow R(x) = \alpha x + \beta$$

PODEMOS QUE: D ≡ d × q + R

$$\hookrightarrow (x-3)^{11} + (x-4)^3 \equiv (x-3)(x-4)q(x) + \alpha x + \beta$$

Por ser identidad, demos valores que permitan calcular α y β .

$$\bullet x=3 \rightarrow -1=3\alpha+\beta \dots (1)$$

$$\bullet x=4 \rightarrow 1=4\alpha+\beta \dots (2)$$

$$\bullet (2)-(1): \alpha=2; \text{ en (2): } \beta=-7$$

$$\therefore \alpha\beta = -14$$

36) NOS PIDEN EL RESTO DE DIVIDIR $P(x) \div (x^4+x^2+1)$

• ASUMAMOS QUE ESTE RESTO ES DE LA FORMA: $R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$\hookrightarrow P(x)=(x^4+x^2+1)q(x)+ax^3+bx^2+cx+d \dots (1)$$

$$\text{OBS. (1): } x^4+x^2+1 \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

(IDENTIDAD DE ARGAND)

OBS. (2): POR DIVISIÓN, HOGAMOS APARECER ax^3+bx^2+cx+d EN FUNCIÓN DE (x^2+x+1) y TAMBIÉN EN FUNCIÓN DE (x^2-x+1) ; ASÍ:

$$\begin{array}{r|l} (1) \quad ax^3+bx^2+cx+d & x^2+x+1 \\ -ax^3-ax^2-ax & \hline (b-a)x^2+(c-a)x+d & \\ -(b-a)x^2-(b-a)x-(b-a) & \hline (c-b)x+(d+a-b) & \end{array}$$

$$\hookrightarrow ax^3+bx^2+cx+d \equiv (x^2+x+1)[ax+(b-a)] + [(c-b)x+(d+a-b)]$$

EN (1):

$$P(x) \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)q(x) + (x^2+x+1)[ax+(b-a)] + [(c-b)x+(d+a-b)]$$

FACTORIZAMOS (x^2+x+1) :

$$P(x) \equiv \underbrace{(x^2+x+1)}_D \underbrace{[(x^2-x+1)q(x) + [ax+(b-a)]]}_Q + \underbrace{[(c-b)x+(d+a-b)]}_{R_1}$$

OBS: R_1 ES EL RESTO DE DIVIDIR $P(x) \div (x^2+x+1)$ (SIGUE ARRIBA \uparrow)

• LUEGO:

$$\bullet R_1 = (c-b)x + (d+a-b) \equiv x+1 \text{ (DATO)}$$

$$\bullet \text{ DE AQUÍ: } c-b=1 \dots (1)$$

$$\bullet d+a-b=1 \dots (2)$$

• AHORA, PROCEDA EN FORMA IGUAL PARA HALLAR EL RESTO DE DIVIDIR $P(x) \div (x^2-x+1)$; PARA ESTO, DIVIDA:

$$(ax^3+bx^2+cx+d) \div (x^2-x+1) \text{ y CON}$$

TÉNUE COMO LO ANTERIOR.....

• EL RESTO QUE SE VA A OBTENER

$$\text{ES: } R_2 = (b+c)x + (d-a-b) \equiv x-1$$

$$\bullet \text{ DE AQUÍ: } b+c=1 \dots (3) \text{ (DATO)}$$

$$\bullet d-a-b=-1 \dots (4)$$

$$\bullet \text{ DE (1) y (3): } c=1 \text{ y } b=0$$

$$\bullet \text{ DE (2) y (4): } d=0; a=1$$

• \therefore EL RESTO BUSCADO ES:

$$R(x) = x^3+x$$

$$\bullet (37) \text{ OBS: } x^3+1 \equiv (x+1)(x^2-x+1)$$

• PARA QUE EL DIVIDENDO:

$$(x^2-x+2)^5 - m(x-2)^4(x+1)^4 + nx^3(x-1)^3$$

• SEA DIVISIBLE POR x^3+1 , LO TEN-

DRÁ QUE SER POR $(x+1)$ y (x^2-x+1)

SEPARADAMENTE.

$$(1^\circ) \text{ POR T.R.: } x+1=0 \rightarrow x=-1$$

\Rightarrow

EN EL DIVIDENDO:

EN EL DIVIDENDO:

$$R = (4)^5 - m(-3)^4 + n(-1)^3(-2)^3 = 0$$

$$\rightarrow 2^{10} = -2^3 \times n \rightarrow n = -2^7$$

$$n = -128$$

(2) For T.R. : $x^2 - x + 1 = 0$
 $\Rightarrow x^2 - x = -1$

DEL DIVIDENDO; SE PUEDE ESCRIBIR:

$$(x^2+x+2)^5 - m(x^2+x-2)^4 + n(x^2+x)^3$$

REEMPLAZANDO ARIÍ:

$$R = (1)^5 - m(-3)^4 + n(-1)^3 = 0$$

$$\rightarrow 1 - 81m - n = 0$$

TRANSPOSELIDDO: $81m + n = 1$

NOTA: DEL (2°) SE PUDO CALCULAR LO PEDIDO, SIN NECESIDAD DE HALLAR n EN EL (1°)

38) AL DIVIDIR $P(x) \div (x+2)^3$, SE OBTIENE POR RESTO $(2x-1)(x+3)+2x$.

⇒ POR LA IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$P(x) \equiv (x+2)^3 q(x) + [(2x-1)(x+3) + 2x] \dots (I)$$

Nos piden el resto de $P(x) \div (x+2)$

Es decir, este resto es $R = P(-2)$

ESTO LO HALLAMOS EN (I):

$$P(-2) = (0) \cancel{(-2)} + [(-5)(1) + (-4)]$$

$$\therefore R_{PEDIDO} = P(-2) = -9$$

(39) EXTENDIENDO LA SUMATORIA: -

$$\begin{aligned} & a_0(x-1)^{25} + a_1(x-1)^{24} + a_2(x-1)^{23} + \dots \\ & \dots + a_{24}(x-1) + a_{25} = 4x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Ahora, ¿Habría el papel de dividendos, lo dividiremos entre $(K-1)$, el resto será ∂_{24} ; así:

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|-----|---|----------|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | ... | 4 | 1 | → |
| 4 | 4 | 4 | 4 | ... | 4 | 4 × 24 | |
| 1 | 4 | 8 | 12 | ... | | $R = 24$ | |
| 4 | 8 | 12 | 16 | ... | | | |

• Términos de Equivalencia

• Según la ley de formación: $R = 24 = 9T$

Obs: Δ_{25} IS EL RESP DO DIVIDIR $4x^{25} - 3x + 2$ ENTRE $(x-1)$
 Δ DIVIDAMOS POR RUFFINI: $14 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 1, & \boxed{3} \end{array} = 205$$

新刊

AL 1ER MEMBRO HONORARIOS (K-1) A TODOS LOS TERNILLAS, EXCEPTO AL ÚLTIMO (KOTIELE). GUENNA ASÍ:

$$\frac{4x^{25}-3x+2}{D} = \frac{a}{d} \left[\frac{b_0(x-1)^{24} + b_1(x-1)^{23} + b_2(x-1)^{22} + \dots + b_{24}}{q} + \frac{b_{25}}{r} \right]$$

NÚMEROS REALES

V

CAPÍTULO

Álgebra

(01) DATO: $(2 \odot x) \odot (4 \odot x) = 3 \odot x$
 COMO $x \in J = \{2; 3; 4\}$, USANDO
 LA TABLA DADA, VERIFIQUEMOS
 EN EL DATO.

(1) Si $x=2 \rightarrow (2 \odot 2) \odot (4 \odot 2) = 3 \odot 2$

$$\begin{array}{r} 4 \odot 3 = 2 \\ 2 = 2 \checkmark \end{array}$$

(2) Si $x=3 \rightarrow (2 \odot 3) \odot (4 \odot 3) = 3 \odot 3$

$$\begin{array}{r} 3 \odot 2 = 3 \\ 2 = 3 \times \end{array}$$

(3) Si $x=4 \rightarrow (2 \odot 4) \odot (4 \odot 4) = 3 \odot 4$

$$\begin{array}{r} 2 \odot 2 = 4 \\ 4 = 4 \checkmark \end{array}$$

$\therefore C.S. = \{2; 4\}$

(02) DE $(a * b)^2 = (a - b)^2$
 $\Rightarrow \underline{a * b = a - b} \vee \underline{a * b = b - a}$

LUEGO:

$\cdot (k+3) * (k-1) = (k+3) - (k-1) = 4$
 \vee

$\cdot (k+3) * (k-1) = (k-1) - (k+3) = -4$

$\therefore \Sigma$ DE LOS POSIBLES VALORES: 0

(03) DATO: $a * b = a + b + |ab|$
 SEA $b = e$, DONDE "e" ES EL ELEMEN-
 TO NEUTRO $\Rightarrow a * b = a * e = a$
 EN EL DATO:

$a = a + e + |ae|$
 $\rightarrow e + |ae| = 0 \dots (I)$

COMO $a \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$; VEAMOS:

* SI $a > 0 \rightarrow a + ae = 0$

$a(a+1) = 0$

OF: COMO $a \neq -1 \Rightarrow a = 0$

* SI $a \leq 0 \rightarrow a - ae = 0$

$a(1-a) = 0$

OF: COMO $a \neq 1 \Rightarrow a = 0$

CONCLUYO, (I) SE VERIFICA SÓLO

SI $a = 0, \forall a \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$\therefore 0$ ES EL ELEM. NEUTRO

(04) USEMOS LA TABLA PARA CALCUL-
 AR X EN:

$[(3 \Delta 2) \Delta (2 \Delta x)] \Delta 3 = 2 \Delta 3$

$[3 \Delta (2 \Delta x)] \Delta 3 = 4$

SEGÚN LA TABLA: $2 \Delta 3 = 4$

SE DEBE CUMPLIR:

$3 \Delta (2 \Delta x) = 2$

DEBE SER 3

OF: $2 \Delta x = 3 \therefore x = 2$

(05) DATO: $a * b = 3a + b$
 SEA $b = e$, DONDE "e" ES EL ELE-
 MENTO NEUTRO

$\Rightarrow a * b = a * e = a$

EN EL DATO:

$a = 3a + e \rightarrow e = -2a$

COMO $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ EXISTIRÁN INFI-
 NITOS VALORES DE e , Y COMO e

DEBE SER ÚNICO; CONCLUYO:

\nexists ELEMENTO NEUTRO

06) DE LA TABLA, VEMOS QUE:

$$1 * 3 = 3 * 1 = 1$$

$$2 * 3 = 3 * 2 = 2$$

$$3 * 3 = 3 * 3 = 3$$

$$4 * 3 = 3 * 4 = 4$$

CONCLUSIÓN: 3 ES EL ELEMENTO NEUTRO RESPECTO A LA OPERACIÓN *

*. ENTONCES $y = 3$ (POR DATO)

$$\text{JUEGO: } x = (2 * 2) * 3$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array} * 3$$

$$1 \Rightarrow x = 1$$

$$\therefore x * y = 1 * 3 = 1$$

07) DATOS: $a * b = a + 2b$
 $c \Delta d = 2c + d$

CON ESTO (POR PARTES):

$$\bullet 2a * b = 2a + 2b$$

$$\bullet a \Delta 2b = 2a + 2b$$

$$\bullet 2a * 2b = 2a + 4b$$

$$\bullet 3b * 2b = 3b + 4b$$

$$\bullet 2a \Delta b = 4a + b$$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO, SE TIENE:

$$\frac{2a + 2b + 2a + 2b + 2a + 4b}{7b + 4a + b + 2a}$$

$$= \frac{6a + 8b}{6a + 8b} = 1$$

08) DATOS: $a * b = 2a + 3b - 1$
 $a \square b = a - b + 2$

CON ESTO: SI $x * y = 5$

$$\rightarrow 2x + 3y - 1 = 5$$

$$2x + 3y = 6 \dots (1)$$

$$\bullet \text{ Si } (3x) \square (-2y) = 1$$

$$\rightarrow 3x - (-2y) + 2 = 1$$

$$3x + 2y = -1 \dots (2)$$

$$(1) \times (2): 5(x + y) = 5$$

$$\therefore x + y = 1$$

09) DATO: $a * b = 2ab$

COMO 4^{-1} ES EL INVERSO DE 4, ENTONCES, SE DEBE CUMPLIR:

$$4 * 4^{-1} = e \dots (I)$$

SIENDO e EL ELEMENTO NEUTRO BAJO LA OPERACIÓN *

HAIEMOS e

$$\text{EN EL DATO: } a * e = 2ae$$

$$\text{DEFINICIÓN: } a = 2ae \rightarrow e = \frac{1}{2}$$

$$\text{EN (I): } 4 * 4^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2(4)(4^{-1}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{DE AQUÍ: } 4^{-1} = \frac{1}{16}$$

10) DATOS: $m \perp n = m^2 n$

$$p \odot q = 3p - q^2$$

$$r \Delta s = 2r + 3s$$

$$\bullet \text{ DE } a \perp a = 6$$

$$\rightarrow a^2 - a = 6$$

$$\rightarrow a(a - 1) = 3 \times 2 \Rightarrow a = 3 \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \text{ DE } b \odot b = -4$$

$$3b - b^2 = -4$$

$$\rightarrow b^2 - 3b = 4 \rightarrow b(b-3) = 4 \times 1$$

$$\diamond b = 4 \in \mathbb{N}$$

Luego:

$$3 \Delta b = 3 \Delta 4$$

$$= 2(3) + 3(4) = 18$$

11) DADO: $m \nabla n = m \nmid n + 2$ ← corrección

HALLEMOS EL ELEMENTO NEUTRO (2)
BAJO LA OPERACIÓN ∇

EN EL DADO: $m \nabla e = m \nmid e + 2$

DEFINICIÓN $\rightarrow m = m \nmid e + 2$

DE AQUÍ: $e = -2$

HALLEMOS LOS INVEROS DE $x, 2$ y 5 .

(1°) $x \nabla x^{-1} = e$

$$x + x^{-1} + 2 = -2 \rightarrow x^{-1} = -x - 4$$

(2°) $2 \nabla 2^{-1} = e$

$$2 + 2^{-1} + 2 = -2 \rightarrow 2^{-1} = -6$$

(3°) SIMILAR: $5^{-1} = -9$

REEMPLAZANDO EN LA IGUALDAD:

$$(-x-4) \nabla -6 = -9 \nabla (-x-4)$$

$$(-x-4) - 6 + 2 = -9 + (-x-4) + 2$$

DE AQUÍ: $-6 = -9$ ¡ABSURDO!

$\therefore \nexists \text{ TAL } x$

12) DADO: $m @ n = m + (1-2m)n$

HALLEMOS EL ELEMENTO NEUTRO (e)
BAJO LA OPERACIÓN @

EN EL DADO: $m @ e = m + (1-2m)e$

DEFINICIÓN $\rightarrow m = m + (1-2m)e$

$$\rightarrow e(1-2m) = 0$$

$$\diamond \text{ COMO } m \neq \frac{1}{2} \rightarrow e = 0$$

HALLEMOS LOS INVEROS DE x y 2

(1°) $x @ x^{-1} = e$

$$x + (1-2x)x^{-1} = 0$$

$$\rightarrow (2x-1)x^{-1} = x \rightarrow x^{-1} = \frac{x}{2x-1}$$

(2°) $2 @ 2^{-1} = e$

$$2 + (1-2(2))2^{-1} = 0$$

$$\rightarrow (3) 2^{-1} = 2 \rightarrow 2^{-1} = \frac{2}{3}$$

REEMPLAZANDO EN LA IGUALDAD:

$$\frac{x}{2x-1} @ \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{x}{2x-1} + \left(1 - 2\left(\frac{x}{2x-1}\right)\right) \cdot \frac{2}{3} = 0$$

DE AQUÍ:

$$\frac{x}{2x-1} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2x-1}\right) \rightarrow 4x-2 = x$$

DE AQUÍ: $x = \frac{2}{3} \therefore \text{O.S.} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

13) DE LA TABLA:

$$a \diamond a = a \diamond a = a$$

$$b \diamond a = a \diamond b = b$$

$$c \diamond a = a \diamond c = c$$

$$d \diamond a = a \diamond d = d$$

CONCLUSIÓN: a ES EL ELEMENTO NEUTRO DE A BAJO \diamond . ($e = a$)

HALLEMOS LOS INVEROS DE a y b

(1°) $a \diamond a^{-1} = e$

$$\Rightarrow a \diamond a^{-1} = a$$

(VER TABLA)

$$\text{OBS: } a^{-1} = a$$

$$(2^{\circ}) \quad b \diamond b^{-1} = e$$

$$\Rightarrow b \diamond b^{-1} = a$$

(VER TABLA)

$$\text{OBS: } b^{-1} = b$$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO:

$$\begin{aligned} & [(a \diamond a)^{-1} \diamond b] \diamond b \\ &= [a^{-1} \diamond b] \diamond b \\ &= [a \diamond b] \diamond b \\ &= c \diamond b = a \end{aligned}$$

$$(14) \text{ DATO: } f(a) * f(b) = f(a * b)$$

SEA LO PEDIDO F , ENTONCES:

$$F = [\dots [f(1) * f(2)] * f(3)] * \dots f(100)]$$

HALEMOS DE ADENTRO HACIA AFUERA, USEMOS LA TABLA.

$$f(1) * f(2) = f(1 * 2) = f(2)$$

$$f(2) * f(3) = f(2 * 3) = f(2)$$

$$f(2) * f(4) = f(2 * 4) = f(2)$$

SEGUIMOS ASÍ, AL FINAL LLEGAREMOS AL CÁLCULO DE $f(2) * f(100)$

$$\therefore F = f(2) * f(100) = f(2)$$

(15) CONSTRUIREMOS LA TABLA DEFINIDA POR LA OPERACIÓN \cup (UNIÓN)

| U | ϕ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ϕ | ϕ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
| $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ |
| $\{b\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
| $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ |

DEL ESQUEMA, EL ELEMENTO NEUTRO ES ϕ $\phi(I) \in V$

DONDE DE ACUERDO A LA TABLA ES EL ÚNICO QUE TIENE INVERSA

$$\phi \phi^{-1} = \phi$$

ADemás, como $x \wedge x^{-1} \in A$

$$\phi x = \phi = x^{-1}$$

y como $x \cup x^{-1} = y \Rightarrow y = \phi$

Por tanto: $x \cap x^{-1} \cap y = \phi$

$$\phi(II) \in V$$

HEMOS VISTO QUE $\phi \in A$, ES EL ÚNICO QUE TIENE INVERSA

$$\phi(III) \in V$$

$$\therefore \underline{VVV}$$

(16) DE LA TABLA, VEMOS QUE:

$$0 \Delta 6 = 0$$

$$2 \Delta 6 = 2$$

$$4 \Delta 6 = 4$$

$$6 \Delta 6 = 6$$

$$8 \Delta 6 = 8$$

OBS: EL ELEMENTO NEUTRO (2)

ES IGUAL A 6 ($2=6$)

$$\text{OBS: SI } [(x^{-1} \Delta 0) \Delta 4]^{-1} = 2$$

$$\Rightarrow 2^{-1} = (x^{-1} \Delta 0) \Delta 4 \dots (\alpha)$$

HALEMOS EL INVERSO DE 2, TENDRÁ QUE VERIFICARSE QUE:

$$2 \Delta 2^{-1} = 6$$

0 (VER TABLA)

$$\text{OBS: } 2^{-1} = 0$$

$$\text{FN}(x): 0 = \underbrace{(x^{-1} \Delta 0)}_2 \Delta 4 \quad (\text{VER TABLA})$$

$$\text{OBS: } \underbrace{x^{-1}}_8 \Delta 0 = 2 \quad (\text{VER TABLA})$$

$$\text{OBS: } x^{-1} = 8 \Rightarrow x = 8^{-1} = ?$$

HALLAMOS EL INVERSO DE 8, SE DEBE VERIFICAR QUE:

$$8 \Delta 8^{-1} = 6$$

4 (VER TABLA)

$$\text{OBS: } 8^{-1} = 4 \quad \therefore x = 4$$

17) ① DE ACUERDO A LA TABLA, SE PUEDE COMPROBAR QUE:

$$\text{I. } (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

POR LO QUE: \wedge ES UN OPERADOR DISTRIBUTIVO RESPECTO DE \vee . (V)

$$\text{II. } (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

POR LO QUE: \vee ES UN OPERADOR DISTRIBUTIVO RESPECTO DE \wedge . (V)

$$\text{III. } (p \wedge q) \vee p \text{ RESULTA ASÍ:}$$

SI p ES V, LA PROPOSICIÓN ES V.

SI p ES F, LA PROPOSICIÓN ES F.

$$\text{POR LO QUE: } (p \wedge q) \vee p \equiv p.$$

(SON EQUIVALENTES LÓGICAMENTE) (V)

$$\therefore VVV$$

CLAVE: A.

18)

| \oplus | 0 | 1 | 2 |
|----------|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

I. DE LA TABLA: 0 ES EL ELEMENTO NEUTRO \Rightarrow (I) ES V

II. USANDO LA TABLA

$$\{[(0 \oplus 1) \oplus 1] \oplus 2\} \oplus 2$$

$$\begin{array}{c} \underbrace{1} \\ \underbrace{0} \\ \underbrace{2} \\ 0 \end{array}$$

\Rightarrow (II) ES V

III. HALLAMOS LOS INVEROS DE 2 y 1

$$(1^\circ) \quad 2 \oplus 2^{-1} = 0$$

2 (VER TABLA)

$$\Rightarrow 2^{-1} = 2$$

$$(2^\circ) \quad 1 \oplus 1^{-1} = 0$$

1 (VER TABLA)

$$\Rightarrow 1^{-1} = 1$$

$$\text{LUEGO: } (2^{-1} \oplus 1^{-1}) \oplus 2$$

$$\begin{array}{c} \underbrace{(2 \oplus 1)}_1 \oplus 2 \\ 1 \end{array}$$

\Rightarrow (III) ES F

$$\therefore VVF$$

19) DE LA TABLA, SIMILAR A LA RESOLUCIÓN 15 Y 18 UBICAMOS EL ELEMENTO NEUTRO. ÉSTE

$$S: \{a; b\}$$

DONDE DE ACUERDO A LA TABLA

S EL ÚNICO QUE TIENE INVERSA

$$\text{DONDE: } \{a; b\}^{-1} = \{a; b\}$$

$$\text{AHORA, DE } X \psi X^{-1} = E \dots (1)$$

COMO $X \in A$ Y TIENE INVERSA

$$\Rightarrow X = \{a; b\}$$

$$\text{LUEGO, EN (1): } \{a; b\} \psi \{a; b\} = E$$

$$\text{VER TABLA: } \{a; b\}$$

$$\text{OBS } E = \{a; b\}$$

FINALMENTE:

$$\begin{aligned} XUX^{-1} \cup E &= \{a; b\} \cup \{a; b\} \cup \{a; b\} \\ &= \{a; b\} \end{aligned}$$

$$(20) \text{ DATOS: } a \oplus b = ab + a + b$$

ELEMENTO NEUTRO: e

EN EL DATO:

$$a \oplus e = ae + a + e$$

$$a = ae + a + e$$

$$\rightarrow e(a+1) = 0$$

DE AQUÍ, ASUMIENDO $a \neq -1$

$$\Rightarrow e = 0$$

HALLEMOS LOS INVEROS DE a y b .

$$(1^\circ) a \oplus a^{-1} = 0$$

$$a \cdot a^{-1} + a + a^{-1} = 0$$

$$(a+1)a^{-1} = -a$$

$$\rightarrow a^{-1} = \frac{-a}{a+1}$$

$$(2^\circ) b \oplus b^{-1} = 0$$

EN FORMA SIMILAR:

$$b^{-1} = \frac{-b}{b+1}$$

LUEGO:

$$a^{-1} \oplus b^{-1} = \left(\frac{-a}{a+1} \right) \left(\frac{-b}{b+1} \right) - \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1}$$

$$= \frac{ab}{(a+1)(b+1)} - \frac{a(b+1) + b(a+1)}{(a+1)(b+1)}$$

$$= - \frac{ab + a + b}{(a+1)(b+1)}$$

$$= 0$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Álgebra

VI

CAPÍTULO

① TRANSFORMANDO:

$$P(x, y, z, w) = (x^2 + y^2 - z^2 - w^2)^2 - [2(xy - zw)]^2$$

Por DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$$= (x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + 2xy - 2zw)(x^2 + y^2 - z^2 - w^2 - 2xy + 2zw)$$

AGRUPANDO LO INDICADO:

$$= [(x+y)^2 - (z+w)^2] [(x-y)^2 - (z-w)^2]$$

DIFERENCIA DE \square_s

$$\hookrightarrow P(x, y, z, w) = (x+y+z+w)(x+y-z-w)(x-y+z-w)(x-y-z+w)$$

\therefore UN FACTOR DE P : $x+y+z+w$

② DESARROLLANDO EN P :

$$P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c) - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

Por SUMA DE CUBOS:

$$P(a, b, c) = 3(a+b)(a^2 - ab + b^2)(b+c)(b^2 - bc + c^2)(a+c)(a^2 - ac + c^2)$$

\therefore # DE FACTORES PRIMOS: 6

③ EFECTUANDO EN F :

$$F(a, b, c) = a^2 + b^2 + ab + ac + ab + bc$$

AGRUPANDO LO INDICADO:

$$F = \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)}{TCP} + (ac + bc)$$

$$= (\underline{a+b})^2 + c(\underline{a+b})$$

$$\hookrightarrow F(a, b, c) = (a+b)(a+b+c)$$

\therefore UN FACTOR DE F : $a+b+c$

④ DESTORBIANDO ASÍ:

$$3x^4 + 3x^2 = x^4 + x^2 + 2x^4 + 2x^2$$

$$S(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x^4 + 2x^2 + 2$$

AGRUPANDO LO INDICADO:

$$S(x) = (x^7 + x^5 + x^3) + (x^6 + x^4 + x^2) + (2x^4 + 2x^2 + 2) = x^3(x^4 + x^2 + 1) + x^2(x^4 + x^2 + 1) + 2(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= (x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$\hookrightarrow S(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

DE AQUÍ:

$$\# \text{ DE FACT. PRIMOS} = p = 3$$

$$\# \text{ DE FACT. ALG.} = (2)(2)(2) - 1 = 7$$

$$\therefore p + f = 3 + 7 = \underline{10}$$

⑤ DE F :

$$F(m, n, p) = m^3 + n^3 + p^3 + m^2n + mn^2 + m^2p + mp^2 + n^2p + np^2$$

AGRUPANDO LO SEÑALADO:

$$= (m^3 + m^2n + m^2p) + (n^3 + mn^2 + n^2p) +$$

$$+ (p^3 + mp^2 + np^2) \\ = m^2(m+n+p) + n^2(n+m+p) \\ + p^2(p+m+n)$$

$$\therefore F(m;n;p) = (m+n+p)(m^2+n^2+p^2)$$

\therefore # DE FACT. IRREDUCIBLES: 2

06) EFECTUAMOS PARA AGRUPAR:

$$J(x;y;z) = x^3(z-y^2) + xy^3 - y^3z^2 + yz^3 \\ - x^2z^3 + x^2yz^2 - xyx$$

$$= x^3(z-y^2) + (xy^3 - xyx) + (-y^3z^2 + yz^3) \\ + (-x^2z^3 + x^2yz^2)$$

$$= x^3(z-y^2) - xy(z-y^2) + yz^2(z-y^2) \\ - x^2z^2(z-y^2)$$

$$= (z-y^2)(x^3 - xy + yz^2 - x^2z^2)$$

$$= (z-y^2)[x(x^2-y) - z^2(x^2-y)]$$

$$\therefore J(x;y;z) = (z-y^2)(x^2-y)(x-z^2)$$

\therefore UN FACTOR DE J, ES: $x-z^2$

$$07) R(x) = (x-x^2)^2 + (1-x^2) - (1-x^2)^2$$

$$= x^2 - 2x^3 + x^4 + 1 - x^2 - 1 + 2x^2 - x^4$$

$$= -2x^3 + 2x^2 = 2x^2(1-x)$$

08) FACTORES CUADRÁTICOS (NO DICE PRIMOS) DE P, SON:

$$x^2 \wedge x(1-x)$$

\therefore SON 2 FACT. CUADRÁTICOS

08) EFECTUANDO EN E:

$$E(x;y;z) = x^3y^3 + x^3z^3 + x^4yz + xy^4z \\ + xyz^4 + y^3z^3 + 2x^2yz^2$$

FACTORIZANDO EN LOS TÉRMINOS INDICADOS:

$$= xy^3(x^2+yz) + xz^3(x^2+yz) \\ + yz(x^4+2x^2yz+y^2z^2)$$

$$= xy^3(x^2+yz) + xz^3(x^2+yz) \\ + yz(x^2+yz)^2$$

$$= (x^2+yz)(xy^3+xz^3+yz(x^2+yz))$$

$$= (x^2+yz)(xy^3+xz^3+x^2yz+y^2z^2)$$

$$= (x^2+yz)(xy(y^2+xz)+z^2(xz+y^2))$$

$$\therefore E(x;y;z) = (x^2+yz)(y^2+xz)(xy+z^2)$$

\therefore # DE FACTORES: $(2)(2)(2) - 1 = 7$

$$09) R(x) = (m^2-n^2)(x^2+1) - 2(m^2+n^2)x$$

EFECTUANDO Y ORDENANDO:

$$R(x) = (m^2-n^2)x^2 - 2(m^2+n^2)x + (m^2-n^2)$$

$$\begin{array}{cc} (m+n)x & - (m-n) \\ (m-n)x & - (m+n) \end{array}$$

$$R(x) = [(m+n)x - (m-n)][(m-n)x - (m+n)]$$

DE AQUÍ, SI ASUMIMOS QUE:

$$f(x) = (m+n)x - (m-n)$$

$$\therefore f(1) = m+n - m+n = 2n$$

⑩ EFECTUANDO LO ADECUADO:

$$P(x) = (x^2 - 12x - 4)^2 - 2x^2 + 24x + 48 - 105$$

$$= (x^2 - 12x - 4)^2 - 2x^2 + 24x - 55$$

$$= (x^2 - 12x - 4)^2 - 2x^2 + 24x + 8 - 63$$

$$= (x^2 - 12x - 4)^2 - 2(x^2 - 12x - 4) - 63$$

$$\begin{array}{r} (x^2 - 12x - 4) \quad \nearrow -9 \\ (x^2 - 12x - 4) \quad \searrow 7 \end{array}$$

$$\rightarrow P(x) = (x^2 - 12x - 13)(x^2 - 12x + 3)$$

$$\begin{array}{r} x \quad \nearrow -13 \\ x \quad \searrow 1 \end{array}$$

$$\rightarrow P(x) = (x - 13)(x + 1)(x^2 - 12x + 3)$$

$$\therefore \text{UN FACT. PRIMO ES: } x^2 - 12x + 3$$

⑪ $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

UNA DE LAS POSIBILIDADES PARA QUE $P(x)$ SEA TRANSFORMABLE EN DOS FACTORES PRIMOS DE IGUAL GRADO, ES DECIR, DE GRADO 2, ES QUE ASUMIÉNDOLO COMO UN POLINOMIO CUADRÁTICO (MEDIANTE CAMBIO DE VARIABLE), SU DISCRIMINANTE DEBE VALER 0.

OB: SI HACEMOS $x^2 = y$

$$\rightarrow P = ay^2 + by + c$$

ASÍ, PARA QUE SEA FACTORIZABLE EN DOS LINEALES (EN SU CUADRÁTICOS) EN EL CAMPO RACIONAL $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$\text{DE AQUÍ: } b^2 = (2a)^2 c$$

$$\therefore \frac{b^2}{(2a)^2} = c$$

⑫ $F(x,y) = x^2(x-y)^2 - 14xy^2(x-y) + 24y^4$

EFECTUANDO COMO SE INDICA:

$$F(x,y) = (x^2 - xy)^2 - 14(x^2 - xy)y^2 + 24y^4$$

$$\begin{array}{r} (x^2 - xy) \quad \nearrow -12y^2 \\ (x^2 - xy) \quad \searrow -2y^2 \end{array}$$

$$= (x^2 - xy - 12y^2)(x^2 - xy - 2y^2)$$

$$\begin{array}{r} x \quad \nearrow -4y \\ x \quad \searrow 3y \end{array} \quad \begin{array}{r} x \quad \nearrow -2y \\ x \quad \searrow y \end{array}$$

$$\rightarrow F(x,y) = (x - 4y)(x + 3y)(x - 2y)(x + y)$$

$$\therefore \text{UN FACTOR ES: } x - 4y$$

⑬ OB: $x^2 = 4x^2 + 3x^2$

$$\rightarrow P(x) = x^6 + 4x^2 + 3x^2 - 6x + 6$$

$$P(x) = x^2(x^4 + 4) + 3(x^2 - 2x + 2)$$

TRABAJEMOS CON (*):

$$(*) = x^4 + 4$$

Por suita y pon $(\pm 4x^2)$:

$$(*) = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$\Rightarrow (*) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

EN P:

$$P(x) = x^2(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) + 3(x^2 - 2x + 2)$$

$$\rightarrow P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3)$$

$$\therefore \text{MAYOR GRADO D' FACT. PRIMO: 4}$$

⑭ OB: $3a^2 = 16a^2 - 13a^2$

CON ESTO, ESCRIBIMOS:

$$R = 36a^4 + (b + 4a)^2(b^2 + 8ba + 16a^2 - 13a^2)$$

TCP

19) APLÍQUEMOS ASPA DOBLE ESPECIAL:

$$P(x) = ax^4 - b(b+a^2)x^3 + a(a+b^2+b^3)x^2 - b(a^3+b^3)x + a^2b^2$$

$$\begin{array}{r|l} ax^2 & -bx \\ \hline x^2 & -abx \end{array}$$

$$a^2 \neq \text{S.D.T.} : (a^2 + b^2)$$

$$b^2 \neq \text{S.T.} : (ab^2 + a^2b)$$

$$\text{FALTA : } ab^3x$$

DE AQUÍ:

$$P(x) = (ax^2 - bx + a^2)(x^2 - abx + b^2)$$

$$\therefore \text{UN FACTOR ES : } ax^2 - bx + a^2$$

20) APLÍQUEMOS ASPA DOBLE EN UNA VARIABLE:

$$F(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 3x^2 \\ \hline x^3 & x^2 \end{array}$$

$$F(x) = (x^3 + 3x^2 + 2)(x^3 + x^2 + 1)$$

Obs: ESTOS FACTORES CÚBICOS NO ADMITEN FACTORIZACIÓN POR DIVISORES BINÓMICOS, EN CONSECUENCIA SE PUEDE AFIRMAR QUE SON PRIMOS. POR TANTO NO TIENE FACTORES LINEALES (PRIMER GRADO).

$$\therefore \# \text{ DE FACT. LINEALES : } 0$$

$$21) \text{Obs: } 5x^4y^4 = x^4y^4 + 4x^4y^4$$

$$P = x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + 4x^4y^4 + 4x^2y^6 + 4y^8$$

$$= x^4(x^4 + x^2y^2 + y^4) + 4y^4(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

$$= (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 + 4y^4)$$

ESTOS SON FACTORES DE P
(NO SON PRIMOS)

¡OJO! EL PROBLEMA PIDE, LA SUMA DE COEFICIENTES DE UN FACTOR (NO DICE, DE UN FACTOR PRIMO) CON ESTO:

LA SUMA DE COEF.

$$\text{DE } (x^4 + 4y^4) \text{ ES : } 5$$

22) APLÍQUEMOS ASPA DOBLE ESPECIAL:

$$x^4(a+1)x^3 + 0x^2 + (a^3 - a^2 + a)x + a^3$$

$$x^4(a+1)x^3 + 0x^2 + (a^3 - a^2 + a)x - a^2(a^2 - a)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -ax \\ \hline x^2 & -x \end{array}$$

$$x^2 \neq \text{S.D.T.} : 0x^2$$

$$x^2 \neq \text{S.T.} : -ax^2$$

$$\text{FALTA : } ax^2$$

$$P(x) = (x^2 - ax + (a^2 - a))(x^2 - x - a^2)$$

$$\text{REEMPLAZANDO LA } x \rightarrow 1$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{4a^2 + 5}}{2} \right)^2 - \frac{1 + \sqrt{4a^2 + 5}}{2} - a^2$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{4a^2 + 5} + 4a^2 + 5}{4} - \frac{1 + \sqrt{4a^2 + 5}}{2} - a^2$$

$$= \frac{1 + 5 - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

23) Obs: $13x^2y^2 = 4x^2y^2 + 9x^2y^2$

JUEGO:

$$\psi(x) = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 + 6xy(x^2 + 2y^2) + 9x^2y^2$$

$$= (x^2 + 2y^2)^2 + 6xy(x^2 + 2y^2) + 9x^2y^2$$

TCP

$$= [(x^2 + 2y^2) + 3xy]^2$$

$$= (x^2 + 3xy + 2y^2)^2$$

$$\begin{array}{ccc} x & & 2y \\ & \nearrow & \searrow \\ x & & y \end{array}$$

$\psi(x) = (x + 2y)^2(x + y)^2$

CON ESTO, SON FACTORES CÚBICOS DE ψ , LO SIGUIENTE:

$$\left. \begin{array}{l} * (x + 2y)^2(x + y) \\ * (x + 2y)(x + y)^2 \end{array} \right\} 2 \text{ factores}$$

$$F(x) = (x^4 + 3x^2 + 6)(x^4 + 3x^2 + 3)$$

IDENTIFICANDO EL FACT. $x^4 + 3x^2 + 3$ CON $x^{2p} + 2x^p + 2$

Obs: $2 = 3 \wedge p = 2$

$\therefore 2 + p = 5$

25) Obs: $8a^3 = 2a^3 + 6a^3$

ESCRIBAMOS COMO SIGUE Y APLICUEMOS ASPA DOBLE:

$$a^6 + (a^5 + 2a^4) + 2a^3 + 6a^3 + (4a^2 + 4a) + 8$$

$$\begin{array}{ccc} a^3 & & 2a^2 \\ & \nearrow & \searrow \\ a^3 & & 2 \end{array}$$

$J(a) = (a^3 + 2a^2 + 4)(a^3 + 2 + 2)$

\therefore UN DIVISOR ES: $a^3 + 2 + 2$

24) BUSQUEMOS $(x^2 + 1)$ PARA HACER CAMBIO DE VARIABLE:

$$F(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 1 + 2) + 6(x^2 + 1)^2 + 5(x^2 + 1) + 4$$

AHORA HACEMOS $x^2 + 1 = a$

$$F = a^3(a + 2) + 6a^2 + 5a + 4$$

$$= a^4 + 2a^3 + 6a^2 + 5a + 4$$

$$\begin{array}{ccc} a^2 & & 4 * 6a^2 \\ & \nearrow & \searrow \\ a^2 & & 1 * 5a^2 \end{array}$$

FALTA: a^2

$F = (a^2 + a + 4)(a^2 + a + 1)$

REPOSICIONANDO:

$$[(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1) + 4][(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1) + 1]$$

EFFECTUANDO EN LOS CORCHETES:

26) HAGAMOS EL CAMBIO:

$$x + m + n + p + q = a$$

JUEGO:

* $A = (a - q)(a - p)$

* $B = (a - n)(a - m)(a - x)$

* $C = mnpqx$

EN F:

$$F = (a - q)(a - p)(a - n)(a - m)(a - x) + mnpqx$$

DESARROLLANDO LO INDICADO:

$$F = a^5 - (q + \dots)a^4 + (qp + \dots)a^3 -$$

$$-(qpr + \dots)a^2 + (qprnm + \dots)a - mnpqx + mnpqx$$

DE LO QUE QUEDA FACTORIZA-

मो "०":

$$F = \alpha [\alpha^4 (\dots) \alpha^3 + (\dots) \alpha^2 - (\dots) \alpha + (\dots)]$$

DE AQUÍ, VEMOS QUE "Q" ES UN FACTOR DE \tilde{F} , PERO, COMO

$$Q = x + m + n + p + q$$

⇒ $x+m+n+p+q$ IS FACTOR OF

53

DE AQUÍ:

$$\overline{(x-1)} [x^2 - 2x + (2-1)]$$

$$\therefore N_P = (x-6-1)(x-2-1)(x-1)$$

REPONIENDO:

$$P(x) = (x^2 - 6 - 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$P(x) = (x^2 - 5 - 1)(x^2 - 2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$\therefore \# \text{ DE DIVISORES PRIMOS: } 4$

② Agrupando en P, así:

$$\tilde{P}(x) = (x^7 + x^5 + x^3) + (x^6 - 1)$$

$$= x^3(\underline{x^4 + x^2 + 1}) + (x^2 - 1)(\underline{x^4 + x^2 + 1})$$

$$= \underline{(x^4 + x^2 + 1)(x^3 + x^2 - 1)}$$

ARGAND

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

HACIENDO: $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

$$\therefore f(10) = 10^3 + 10^2 - 1 = \underline{1099}$$

②9.03: $-T = -1346$

புகழ்:

$$I(p) = 4(p^2 - p + 1)^3 - 13p(p-1) - 13 + 6.$$

$$= 4(p^2 - p + 1)^3 - 13(p^2 - p + 1) + 6$$

$$H(\Delta CEMO) \quad p^2 - p + I = x$$

$$\Rightarrow I = 4x^3 - 13x + 6$$

POR DIVISORES BINÓMICOS:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 0 & -13 & 6 \\ -2 & \downarrow & -8 & 16 & -6 \\ \hline & 4 & -8 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\text{b. } I = (x+2)(4x^2 - 8x + 3)$$

~~$$\begin{array}{r} 2x \\ 2x \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{r} -3 \\ -1 \end{array}$$~~

$$I = (x+2)(2x-3)(2x-1)$$

RECONIENDO:

$$I(p) = (p^2 - p + 1 + 2)(2p^2 - 2p + 2 - 3) \cdot (2p^2 - 2p + 2 - 1)$$

(28) OBSÉRVESE LA TRANSFORMACIÓN

$$-a+b-a+b+1 = -(a-b+a-b-1)$$

$$= - [2(1+b) - (b+1)]$$

$$= -(b+1)(a-1)$$

Haciendo $x^2 = x$, se tiene:

$$P = x^3 - (a+b+1)x^2 + (ab+2a-1)x - (b+1)(a-1)$$

Por divisores binómicos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & (-a-b-1) & (2b+2a-1) & -(b+1)(a-1) \\
 b+1 & \downarrow & b+1 & (-2b-a) & (b+1)(a-1) \\
 \hline
 & 1 & -a & (a-1) & 0
 \end{array}$$

$$= (p^2 - p + 3)(2p^2 - 2p - 1)(2p^2 - 2p + 1)$$

DE AQUÍ:

$$\# \text{ DE DIVISORES: } (2)(2)(2) - 1 = 7$$

30) TRANSFORMEMOS "M":

$$M(x) = (x+3)(x-3)(x+2)(x-2)(x+1)(x-1) + 35(x^2+1)^2$$

EFFECTUANDO LOS FACTORES SEÑALADOS:

$$M(x) = (x^2+6x+1)(x^2-6x+1)(x^2+1) + 35(x^2+1)^2$$

$$= [(x^2+1)(6x+1) - (6x-1)](x^2+1) + 35(x^2+1)^2$$

$$= [(x^2+1)^2 - (6x-1)^2] + 35(x^2+1)^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 36(x^2+1)^2 + 35(x^2+1)^2$$

$$M(x) = (x^2+1)^2 - (x^2+1)^2$$

$$= (x^2+1)(x^2+1)(x^2+1-x^2-1)$$

OB): ESTOS FACTORES CÚBICOS NO ADMITEN FACTORIZACIÓN POR DIVISORES BINÓMICOS, EN CONSECUENCIA SE PUEDE AFIRMAR QUE SON PRIMOS. POR TANTO NO TIENE FACTORES CUADRÁTICOS (SEGUNDO GRADO).

31) DESARROLLANDO EN P

$$P = [2x^2 + (y+z)x + yz]^2 + (y-z)^2 x^2$$

$$= 4x^4 + (y+z)^2 x^2 + y^2 z^2 + 4(y+z)x^3$$

$$+ 4yzx^2 + 2(y+z)yzx + (y-z)^2 x^2$$

$$= 4x^4 + 4(y+z)x^3 + (2y^2 + 2z^2 + 4yz)x^2$$

$$+ 2(y+z)yzx + y^2 z^2$$

EFFECTUANDO:

$$4x^4 + 4x^3 y + 4x^3 z + 2x^2 y^2 + 2x^2 z^2$$

$$+ 4x^2 yz + 2x y^2 z + 2x y z^2 + y^2 z^2$$

AGRUPANDO LOS TÉRMINOS INDICADOS:

$$(4x^4 + 4x^3 y + 2x^2 y^2) + (4x^3 z + 4x^2 yz)$$

$$+ 2x y^2 z + (2x^2 z^2 + 2x y z^2 + y^2 z^2)$$

$$= 2x^2(2x^2 + 2xy + y^2) + 2xz(2x^2 + 2xy)$$

$$+ y^2 + z^2(2x^2 + 2xy + y^2)$$

EXTRAEMOS FACTOR $(2x^2 + 2xy + y^2)$

$$(2x^2 + 2xy + y^2)(2x^2 + 2xz + z^2)$$

OSEA QUE $P(x,y,z)$ ES DIVISIBLE POR $(2x^2 + 2xy + y^2)$ O TAMBIÉN $x^2 + (x+y)^2$

$$(2x^2 + 2xy + y^2) \text{ ó TAMBIÉN } x^2 + (x+y)^2$$

$$(2x^2 + 2xy + y^2)$$

(DESDOUBLE $2x^2$)

$$32) \text{ OB): } *x^8 = -x^8 + 2x^8$$

$$*5 = 2 + 3$$

EN M:

$$M(x) = x^{11} - x^8 + 2x^8 + 2x^4 + 2 - 3x^3 + 3$$

$$= x^8(x^3 - 1) + 2(x^8 + x^4 + 1) - 3(x^3 - 1)$$

ARGANDO
DIF. DE CUBO

$$= x^3(x-1)(x^2+x+1) + 2$$

$$(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) - 3(x-1)(x^2+x+1)$$

ARGANDO

$$= x^3(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)$$

$$\cdot (x^2-x+1)(x^4-x^2+1) - 3(x-1)(x^2+x+1)$$

OBS: FACTOR COMÚN ES: x^2+x+1

$$\hookrightarrow M(x) = (x^2+x+1)[\dots\dots]$$

$$\therefore \text{UN FACTOR DE } M \text{ ES: } \underline{x^2+x+1}$$

$$(33) * (2x+1)^7 + 4x(x+1) + 2$$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$$(2x+1)^7 + \underbrace{(4x^2+4x+1)}_{TCP} + 1$$

$$= (2x+1)^7 + (2x+1)^2 + 1$$

$$\text{HACEMOS: } 2x+1=y$$

$$\hookrightarrow y^7 + y^2 + 1 \text{ (QUITA Y PON DE 4)}$$

$$\rightarrow \underline{y^7 - y^4 + y^4 + y^2 + 1}$$

ARGANDO

$$= y^4(y^3-1) + (y^4+y^2+1)$$

$$= y^4(y-1)(y^2+y+1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$

FACTOR COMÚN: y^2+y+1

$$(y^2+y+1)(y^5-y^4+y^2-y+1)$$

OBS: UN FACTOR DEL POLINOMIO

ES: y^2+y+1 , O TAMBIÉN:

$$(2x+1)^2 + (2x+1) + 1$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 + 2x + 1 + 1$$

$$\underline{\text{REDUCIENDO: } 4x^2 + 6x + 3}$$

34) DEL DATO:

$$P(x) = (x-1)(x^2-2)(x^3-3) + 2(2x^3-3x+3)$$

OBS: P(x) ES DE GRADO 6.

PERO POR CONDICIÓN:

$$P(x) = x^n(x+c)^n(x^n+2x-2)$$

NECESARIAMENTE: $n=2$

POR SER IDÉNTICOS, DAMOS VA-

LORES A "x":

+ PARA $x=1$

$$P(1) = 2(2) = (1+c)^2 \rightarrow 4 = (1+c)^2$$

$$\text{DE AQUÍ: } \underline{c=1}$$

+ PARA $x=2$

$$P(2) = (1)(2)(5) + 2(13) = 4(9)(4+2)$$

$$\rightarrow 36 = 36(4+2) \rightarrow 1 = 4+2$$

$$\text{DE AQUÍ: } \underline{2=-3}$$

$$\therefore n-2c = 2 - (-3)(1) = 5$$

35) HAGAMOS $ab=x$

$$\hookrightarrow R = x^{10} - \underbrace{3x^8}_{OJO} + x^4 + 1$$

$$R = x^{10} - x^8 - 2x^8 + x^4 + 1$$

$$= x^8(x^2-1) - (2x^8 - x^4 - 1)$$

$$\begin{array}{r} 2x^8 \\ x^4 \end{array} \begin{array}{r} x^4 \\ -1 \end{array}$$

$$= x^8(x^2-1) - (2x^4+1)(x^4-1)$$

$$= x^8(x^2-1) - (2x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$$

$$= (x^2-1)[x^8 - (2x^4+1)(x^2+1)]$$

$$= (x+1)(x-1)[x^8 \dots]$$

OBS. ES FACTOR DE R: $x+1$

$$\underline{\text{REPONIENDO: } ab+1}$$

36) DESARROLLANDO:

$$P = [(m+n)^2]^2 + m^4 + n^4$$

$$= (m^2 + 2mn + n^2)^2 + m^4 + n^4$$

$$= m^4 + 4m^2n^2 + n^4 + 4m^3n + 2m^2n^2 + 4mn^3 + m^4 + n^4$$

REDUCEMOS PARA LUEGO

APLICAR ASPA DORLE ESPECIAL

$$2(m^4 + 2m^3n + 3m^2n^2 + 2mn^3 + n^4)$$

$$\begin{array}{ccccc} m^2 & \uparrow & \boxed{mn} & \uparrow & n^2 \\ m^2 & & mn & & n^2 \end{array}$$

$$* S.D.T.: 3m^2n^2$$

$$* S.T.: 2m^2n^2$$

$$FALTA: m^2n^2$$

DE AQUÍ:

$$P(m,n) = 2(m^2 + mn + n^2)^2$$

Obs. P NO TIENE FACTORES LINEALES.

$$\therefore \# \text{ DE FACT. LINEALES } : 0$$

37) HAGAMOS LOS CAMBIOS:

$$\left. \begin{array}{l} * x-a=m \\ * x-b=n \\ * x-c=p \end{array} \right\} \text{ DE AQUÍ: } \begin{array}{l} * a-b=n-m \\ * b-c=p-n \\ * c-a=m-p \end{array}$$

REEMPLAZANDO EN EL POLINOMIO

$$P = m^3(p-n)^3 + n^3(m-p)^3 + p^3(n-m)^3$$

$$= (mp-mn)^3 + (nm-np)^3 + (pn-pm)^3$$

AHORA, SI HACEMOS:

$$mp-mn = \alpha$$

$$nm-np = \alpha$$

$$np-pm = \theta$$

$$\text{CON ESTO: } P = \alpha^3 + \beta^3 + \theta^3$$

PERO, SE NOTA QUE:

$$\alpha + \beta + \theta = 0$$

DIVIDE POR PRODUCTOS NOTABLES, SE CUMPLE:

$$\text{SI } \alpha + \beta + \theta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \theta^3 = 3\alpha\beta\theta$$

$$\text{OSEA QUE: } P = 3\alpha\beta\theta$$

REPOSICIONANDO:

$$P = 3(mp-mn)(mn-np)(np-pm)$$

$$= 3mnp(p-n)(m-p)(n-m)$$

REEMPLAZANDO m, n, p:

$$P(x) = 3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$\therefore \text{UN FACTOR DE P ES: } (x-a)$$

$$38) F(x,z) = 6x^3 + 7xz^2 + 3xz^2 - 2z^3$$

FOR DIVISORES BINÓMICOS:

$$\begin{array}{c|cccc} x = \frac{z}{3} & 6 & 7z & 3z^2 & -2z^3 \\ & \downarrow & 2z & 3z^2 & 2z^3 \\ \hline & 6 & 9z & 6z^2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow F = (x - \frac{z}{3})(6x^2 + 9xz + 6z^2)$$

$$= (3x - z)(2x^2 + 3xz + 2z^2)$$

$$\therefore \text{PROD. DE COEF. DE } (3x - z) : -3$$

$$39) R(x) = (x^8 + x^2) + (x^4 - 1)$$

$$= x^2(x^6 + 1) + (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= x^2(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1)$$

$$= (x^2+1)[x^6-(x^4-2x^2+1)]$$

$$= (x^2+1)[x^6-(x^2-1)^2]$$

$$\therefore R(x) = (x^2+1)(x^2+x-1)(x^2-x+1)$$

\therefore # FACT. NO REDUCTIBLES: 3
(FACT. PRIMOS)

40) EFECTUANDO LO ADECUADO:

$$R = 4(x^2+xy+y^2)^3 - 27x^2y^2(x^2+2xy+y^2)$$

AHORA, HACEMOS LOS CAMBIOS:

$$x^2+y^2 = a \wedge xy = b$$

$$\therefore R = 4(a+b)^3 - 27b^2(a+2b)$$

$$= 4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3 - 27a^2b - 54b^3$$

$$= 4a^3 + 12a^2b - 15ab^2 - 50b^3$$

POR DIVISORES BINOMIOS:

| | | | |
|------|-----|-------------------|-------------------|
| 4 | 12b | -15b ² | -50b ³ |
| a=2b | 8b | 40b ² | 50b ³ |
| 4 | 20b | 25b ² | 0 |

$$\therefore R = (a-2b)(4a^2+20ab+25b^2)$$

$$= (a-2b)(2a+5b)^2$$

REPONIENDO:

$$R = (x^2+y^2-2xy)(2x^2+2y^2+5xy)^2$$

EL FACTOR DADO, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$nx^2+ny^2+(n-3)xy$$

IDENTIFICÁNDOLO CON EL FACTOR OBTENIDO: x^2+y^2-2xy ,

PODEMOS CONCLUIR: $n=1$

41) RECUERDE

POR PRODUCTOS NOTABLES

• SI $a+b+c=0$, ENTONCES:

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc(a+b+c)^2$$

EN EL PROBLEMA:

$$F(x,z) = (x+z)^7 - x^7 - z^7$$

$$= (x+z)^7 + (-x)^7 + (-z)^7$$

SI HACEMOS:

$$x+z=a; -x=b; -z=c$$

$$\text{VEMOS QUE: } F = a^7+b^7+c^7$$

DONDE OBS. QUE: $a+b+c=0$

CON ESTO, ENTONCES:

$$F = 3abc(a+b+c)^2$$

REPONIENDO LOS EQUIVALENTES DE a, b, c , SE TIENE:

$$F(x,z) = 7(x+z)(-x)(-z)$$

$$\cdot [(x+z)(-x) + (-x)(-z) + (x+z)(-z)]$$

$$= 7(x+z)(xz)[-x^2-xz+xz-xz-z^2]$$

$$= 7(x+z)(xz)(-x^2-xz-z^2)^2$$

O TAMBIÉN:

$$F(x,z) = 7xz(x+z)(x^2+xz+z^2)^2$$

\therefore # DE FACT. PRIMOS: 4

NOTA:

OTRA FORMA DE FACTORIZAR

$F(x,z)$ ES, APLICANDO LA FACTORIZACIÓN SIMÉTRICA Y/O ALTERNADA.

42) TRANSFORMEMOS F , ASÍ:

$$P(x; y; z) = [(x+y)(x+z)]^2 + x(x+y+z) - y^2 z^2$$

$$= (x^2 + xy + xz + yz)^2 + (x^2 + xy + xz) - y^2 z^2$$

Si HACEMOS:

$$x^2 + xy + xz = a$$

$$\Rightarrow P = (a + yz)^2 + a - y^2 z^2$$

$$= a^2 + 2ayz + y^2 z^2 + a - y^2 z^2$$

$$= a^2 + 2ayz + a$$

$$\Rightarrow P = a(a + 2yz + 1)$$

Obsérvese, es factor de P , a

es decir, es factor de P :

$$x^2 + xy + xz \text{ ó } x(x+y+z)$$

donde x y $(x+y+z)$ son

factores primos de P ,

siendo la suma de ellos

$$dos: \underline{2x + y + z}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad 0 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

NÚMEROS COMPLEJOS

VII

Algebra

CAPÍTULO

01 RECORDEMOS QUE:

$$(1+i)^4 = (1-i)^4 = -4$$

$$\Rightarrow (1+i)^8 = (1-i)^8 = 16$$

APLICANDO EN LA IGUALDAD DADA:

$$\left[\frac{(1+i)^8}{(1+i)} + \frac{(1-i)^8}{(1-i)} \right]^n = 4096$$

$$\left[\frac{16}{1+i} + \frac{16}{1-i} \right]^n = 4096$$

$$\left\{ 16 \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \right] \right\}^n = 4096$$

$$\left\{ 16 \left[\frac{1-i + 1+i}{(1+i)(1-i)} \right] \right\}^n = 4096$$

$$\left\{ 16 \left[\frac{2}{2} \right] \right\}^n = 4096 \rightarrow (2^4)^n = 2^{12}$$

$$\rightarrow 2^{4n} = 2^{12} \Rightarrow 4n = 12 \Rightarrow n = 3$$

02 RECUÉRDASE

$$(1+i)^3 = -2+2i \quad (1+i)^4 = -4$$

EN LA IGUALDAD DADA:

$$\left[(1+i)^{\frac{1}{n}} + 2(1+i)^{\frac{3}{n}} + 3(1+i)^{\frac{4}{n}} \right]^n = -6^{16} \cdot 4$$

DE AQUÍ, SUMANDO:

$$\rightarrow [6(1+i)^{\frac{1}{n}}]^n = 6^{16} \cdot (-4)$$

$$\rightarrow [6^n (1+i)]^n = 6^{16} (1+i)^4$$

$$\rightarrow [6^n (1+i)]^n = [6^4 (1+i)]^4$$

$$\therefore \text{IDENTIFICANDO: } n=4$$

03 RECUERDE

$$(n+k)^m = n+k^m; m \in \mathbb{N}$$

APLICANDO EN: 33^{34}

$$33^{34} = (32+1)^{34} = (4+1)^{34} = 4+1^{34}$$

$$\rightarrow 33^{34} = 4+1$$

REEMPLAZANDO EN LA IGUALDAD:

$$2+bi = [(2-3i)^{4+1}] 1-i$$

$$2+bi = [(2-3i)^{1+i}] 1-i$$

$$\rightarrow 2+bi = (2-3i)^2 = -5-12i$$

POR IGUALDAD DE COMPLEJOS:

$$a = -5 \text{ y } b = -12$$

$$\therefore 2a-b = -10+12 = 2$$

04 SEA LO PEDIDO W, ÉSTE SE PUEDE ESCRIBIR:

$$W = z^{-z} = z^{-4}$$

POR PARTES:

$$\bullet \text{ SI } z = 1+i \rightarrow \bar{z} = 1-i$$

$$\rightarrow \bar{z}^4 = (1-i)^4 \rightarrow \bar{z}^4 = -4$$

$$\text{EN W: } W = z^{-z} = z^{-(-4)} = z^4$$

PERO $z^4 = (1+i)^4 \rightarrow z^4 = -4$

LUEGO:

$w = z^{-(-4)} = z^4 \therefore w = -4$

05) Puesto: $z = \frac{1+4n^2i}{8n^2-i}$

$\Rightarrow z - \frac{3i}{4} = \frac{1+4n^2i}{8n^2-i} - \frac{3i}{4}$

$= \frac{4+16n^2i-24n^2i-3}{(8n^2-i) \times 4}$

$= \frac{1-8n^2i}{(8n^2-i) \times 4}$

TOMANDO MÓDULO Y APLICANDO PROPIEDADES:

$|z - \frac{3i}{4}| = \left| \frac{1-8n^2i}{(8n^2-i) \times 4} \right|$

$= \frac{|1-8n^2i|}{|8n^2-i| |4|}$

$= \frac{\sqrt{1+64n^4}}{\sqrt{64n^4+1} \times 4}$

$\therefore |z - \frac{3i}{4}| = \frac{1}{4}$

06) MULTIPLÍQUEMOS Y DIVIDAMOS POR i A LA 2ª FRACCIÓN:

$\frac{1+2i}{2+i} + \frac{2+3i}{1-2i} \times \frac{i}{i} = ki$

$\frac{1+2i}{2+i} + \frac{2i-3}{i+2} = ki$

SUMANDO: $\frac{-2+22i}{2+i} = ki$

$\rightarrow \frac{2(-1+22i)}{2+i} = ki$

MULTIPLICAMOS Y DIVIDIMOS POR i A LA FRACCIÓN:

$\frac{2(-1+22i)}{2+i} \times \frac{i}{i} = ki$

$\frac{2i(-1+22i)}{2i-1} = ki \Rightarrow k=2$
 $\therefore k^4+1=17$

07) DATO: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(2+bi) = f(b) + if(2)$

HALLEMOS C/U DE LOS TÉRMINOS DE LA SIGUIENTE SUMATORIA:

$\sum_{k=1}^{2002} f(k+i)$

$k=1 \rightarrow f(1+i) = f(1) + if(1)$

Por condición: $(f(1) + if(1)) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(1) = 0$

LUEGO: $f(1+i) = 0 + 0 = 0$

$k=2 \rightarrow f(2+i) = f(1) + if(2) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(2) = 0$

LUEGO: $f(2+i) = 0 + 0 = 0$

$k=3 \rightarrow f(3+i) = f(1) + if(3) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(3) = 0$

LUEGO: $f(3+i) = 0 + 0 = 0$

\vdots

$f(2002+i) = 0$

VEAMOS QUE:

$$f(1+i) + f(2+i) + \dots + f(2002+i) = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2002} f(k+i) = 0$$

08) SEGÚN CONDICIÓN:

$$\alpha = a + mi \quad \wedge \quad \beta = b - mi$$

DONDE $a, b, m \in \mathbb{R}; m \neq 0$

VEÁSE: $\alpha + \beta = a + b \in \mathbb{R}$

LUEGO: $\alpha\beta = (a+mi)(b-mi) = (ab+m^2) + (bm-am)i$

AHORA, PARA QUE $\alpha\beta$ SEA IMAGINARIO PURO, SE DEBE CUMPLIR:

$$ab + m^2 = 0 \rightarrow ab = -m^2$$

ES (-)

OBS: ¡(ab) ES NEGATIVO!

TRANSFORMEMOS LO PEDIDO:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - b^3}{a^2b - ab^2} &= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{ab(a-b)} \\ &= \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{ab}{ab} \\ &= \frac{a^2+b^2}{ab} + 1 \dots (I) \end{aligned}$$

AHORA, SABEMOS QUE: $(a+b)^2 \geq 0$

$$\rightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab$$

DIVIDIDO POR ab : $\frac{a^2+b^2}{ab} \leq -2$
(OJO: $ab < 0$)

DE AQUÍ: MÁXIMO VALOR

$$\text{DE } \left(\frac{a^2+b^2}{ab} \right) \text{ ES: } -2$$

EN (I):

• MÁXIMO VALOR

$$\therefore \text{DE } \left(\frac{a^3-b^3}{a^2b-ab^2} \right) \text{ ES: } -2+1 = -1$$

09) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(\alpha) = \operatorname{Im}(\beta) \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha = a + bi \quad \wedge \quad \beta = c + ai$$

POR DATO: $|\alpha| = |\beta| = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+a^2} = 1$$

$$\text{ó } a^2 + b^2 = c^2 + a^2 = 1 \dots (I)$$

ADemás, VEMOS QUE:

$$\alpha - \beta i = a + bi - (c + ai)i$$

$$= a + bi - ci + a$$

$$= 2a + (b-c)i$$

Por dato: $\operatorname{Im}(\alpha - \beta i) = b - c \neq 0$

DE AQUÍ: $b \neq c$

DE (I): $a^2 + b^2 = c^2 + a^2 \rightarrow b = -c$

LOS PIDEN:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2(a^2 + b^2) \dots (II)$$

LEGENDRE

PERO: $\alpha^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

ó TAMBIÉN: $\alpha^2 = a^2 - b^2 - 2aci$

ADemás: $\beta^2 = c^2 - a^2 + 2aci$

SUMANDO: $\alpha^2 + \beta^2 = c^2 - b^2$

PERO DE (I): $b^2 = c^2$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

EN (II):

$$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(0) = 0$$

10) DE LA IGUALDAD DADA:

$$E_1 + E_2 = E_2 + E_3 = E_3 + E_1$$

IGUALANDO POR PARTES, SE CONCLUYE:

$$E_1 = E_2 = E_3$$

AHORA, HACEMOS: $E_1 = E_2 = E_3 = (E)$

CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

HALLE $(z_1 - iz_4)^4 + (z_3 + iz_2)^4$

$[z_1 + z_3 + i(z_2 - z_4)]^4$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO:

$$\frac{(z - iz)^4 + (z + iz)^4}{[z + z + i(z - z)]^4}$$

$$= \frac{z^4(1-i)^4 + z^4(1+i)^4}{(2z)^4}$$

$$= \frac{z^4(1-i)^4 + z^4(1+i)^4}{(2z)^4}$$

$$= \frac{z^4(-4) + z^4(-4)}{2^4 z^4} = \frac{-8z^4}{16z^4} = -\frac{1}{2}$$

(11) DE $\frac{z+a}{z+b} = \frac{\bar{z}-b}{\bar{z}-a}$; SEA: $z = m+ni$

RESTANDO 1 A AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{z+a}{z+b} - 1 = \frac{\bar{z}-b}{\bar{z}-a} - 1$$

$$\frac{a-b}{z+b} = \frac{a-b}{\bar{z}-a}$$

DE AQUÍ: $z+b = \bar{z}-a$

$$\rightarrow \bar{z} - z = a+b$$

$$\rightarrow -2ni = a+b$$

#REAL

¡OJO! PARA QUE SE CUMPLA LO ANTERIOR, LA ÚNICA POSIBILIDAD ES:

$$n=0, \text{ O SEA QUE } a+b=0$$

DE DONDE: $a = -b$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO:

$$f = \frac{-b \cdot b - 5b^2(-b-b)}{2b^4}$$

$$f = \frac{-2b^5 + 10b^5}{3b^5} = \frac{8b^5}{3b^5} \therefore f = \frac{8}{3}$$

(12) SEA $z = a+bi$; EN LA IGUALDAD:

$$(a+bi)^2 + 12 = a^2 + b^2 - i$$

$$\rightarrow a^2 - b^2 + 2abi + 12 = a^2 + b^2 - i$$

$$\rightarrow (12 - b^2) + 2abi = b^2 - i$$

DE AQUÍ: $* 12 - b^2 = b^2 \dots (1)$

$$* 2ab = -1 \dots (2)$$

DE (1): $b^2 = 6 \rightarrow b = \sqrt{6} \text{ ó } -\sqrt{6}$

SI $b = \sqrt{6}$; EN (2): $a = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$

LUEGO: $z_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}} + \sqrt{6}i$

SI $b = -\sqrt{6}$; EN (2): $a = \frac{1}{2\sqrt{6}}$

LUEGO: $z_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} - \sqrt{6}i$

\therefore EXISTEN 2 COMPLEJOS

(13) RECUERDE

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}; \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

APLIQUEMOS EN LO PEDIDO (POR PARTES):

$$|z_2 + iz_1|^2 = (z_2 + iz_1)(\overline{z_2 + iz_1})$$

$$= (z_2 + iz_1)(\bar{z}_2 + i\bar{z}_1)$$

$$= (z_2 + iz_1)(\bar{z}_2 - i\bar{z}_1)$$

$$= z_2\bar{z}_2 - z_2i\bar{z}_1 + iz_1\bar{z}_2$$

$\neq z_2\bar{z}_2$

$$|z_2 + iz_1|^2 = |z_2|^2 - iz_1 \bar{z}_2 + iz_1 \bar{z}_2 + |z_1|^2 \dots (\alpha)$$

EN FORMA ANALOGA:

$$|z_1 + iz_2|^2 = |z_1|^2 - iz_1 \bar{z}_2 + iz_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2$$

$(\alpha) + (\beta):$

$$\begin{aligned} |z_2 + iz_1|^2 + |z_1 + iz_2|^2 &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \\ &= 2(0 + 9) \\ &= 36 \end{aligned}$$

14) APLICANDO EL RECUERDE ANTERIOR, SE CONCLUYE:

SEIENDO z y $w \in \mathbb{C}$,

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

APLICANDO ESTO EN EL PROBLEMA:

$$|z_2 + z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 = 4|z_1|^2$$

$$2(|z_2|^2 + |z_1|^2) = 4|z_1|^2$$

$$\text{DE AQUÍ: } |z_2|^2 = |z_1|^2 \rightarrow |z_2| = |z_1|$$

$$\therefore \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$$

$$\begin{aligned} (1) \quad z_1^2 + z_2^2 &= 0 \quad \wedge \quad (2) \quad \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 - iz_2} = 3 + 2i \end{aligned}$$

• DE (1), SE PUEDE ESCRIBIR:

$$z_1^2 - i^2 z_2^2 = 0 \rightarrow (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2) = 0$$

$$\rightarrow z_1 + iz_2 = 0 \quad \vee \quad z_1 - iz_2 = 0$$

OBSÉRVESE POR (2): $z_1 - iz_2 \neq 0$

$$\rightarrow z_1 + iz_2 = 0 \rightarrow \underline{z_1 = -iz_2} \quad (\alpha)$$

DE AQUÍ; TOMANDO MÓDULOS:

$$|z_1| = |-iz_2| \rightarrow |z_1| = \underbrace{|-i|}_{1} |z_2|$$

$$\text{VEMOS QUE: } |z_1| = |z_2|$$

$$\begin{aligned} (\alpha) \text{ EN (2): } & \frac{(-iz_2)^2 - z_2^2}{-iz_2 - iz_2} = 3 + 2i \\ & \frac{-z_2^2 - z_2^2}{-2iz_2} = 3 + 2i \end{aligned}$$

$$\frac{2z_2^2}{2iz_2} = 3 + 2i \rightarrow \frac{z_2}{i} = 3 + 2i$$

$$\rightarrow z_2 = -2 + 3i$$

$$\rightarrow |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} \rightarrow |z_2| = \sqrt{13}$$

$$\text{OFA: } |z_2| = \sqrt{13} = |z_1|$$

EN LO PEDIDO:

$$\begin{aligned} \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 \cdot z_2|} &= \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1| \cdot |z_2|} \\ &= \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}^2} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

$$16) \text{ DATO: } P(z) = z^2 + 2z + a$$

$$\neq P(i\omega) = (i\omega)^2 + 2(i\omega) + a$$

$$P(i\omega) = -\omega^2 + 2a i + a$$

$$\neq P(a) = a^2 + 2a + a$$

$$\text{CONDICIÓN: } P(i\omega) = P(a) - i$$

$$\rightarrow -\omega^2 + 2a i + a = a^2 + 2a + a - i$$

$$\rightarrow 2\omega^2 + 2a(1-i) - i = 0$$

$$\text{POR 2: } 4\omega^2 + 4a(1-i) - 2i = 0$$

$$\underline{4\omega^2 + 4a(1-i) + (1-i)^2 = 0}$$

CUADRADO PERFECTO

$$\sim [2\omega + (1-i)]^2 = 0$$

$$\rightarrow 2\omega = i-1 \quad \text{ó} \quad \omega = \frac{i-1}{2}$$

LUEGO:

$$P(2\omega) = P(i-1) = (i-1)^2 + 2(i-1) + \frac{i-1}{2}$$

$$= -2i + 2i - 2 + \frac{i-1}{2}$$

$$\therefore P(2\omega) = \frac{i-5}{2}$$

17) $H(z) = z^2 + \alpha z + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{(0;0)\}$

Por dato: $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

$$\rightarrow \overline{z^2 + \alpha z + \beta} = \bar{z}^2 + \bar{\alpha} \bar{z} + \bar{\beta}$$

$$\bar{z}^2 + \bar{\alpha} \bar{z} + \bar{\beta} = \bar{z}^2 + \alpha \bar{z} + \beta$$

PODEMOS DECIR: $\bar{\alpha} = \alpha \wedge \bar{\beta} = \beta$

CONCLUIMOS: $\alpha \wedge \beta \in \mathbb{R}$

COMO $i-1$ ES RAÍZ $\hookrightarrow P(i-1) = 0$

$$\rightarrow (i-1)^2 + \alpha(i-1) + \beta = 0$$

$$\rightarrow -2i + \alpha i - \alpha + \beta = 0$$

$$\rightarrow (\alpha-2)i + (\beta-\alpha) = 0$$

DE AQUÍ: $\alpha-2=0 \wedge \beta-\alpha=0$

$$\rightarrow \alpha=2 \wedge \beta=\alpha$$

OSEA QUE: $P(z) = z^2 + 2z + 2$

$$\hookrightarrow P(i) = i^2 + 2i + 2$$

$$= -1 + 2i + 2 \therefore P(i) = 2i + 1$$

18) $P(z) = az^2 + bz + c$

Si α y β son raíces de P , entonces

es $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \wedge \alpha\beta = \frac{c}{a}$

(1) (2)

LOS PIDEN:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2}{2} = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

LEGENDRE

$$= 2[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$$

$$= 2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{b^2}{a^2} - \frac{2ac}{a^2}\right]$$

$$= 2\left[\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right]$$

PERO POR DATO: $b^2 - 4ac = 2a^2 - 2ac$

$$\rightarrow b^2 - 2ac = 2a^2$$

REEMPLAZANDO ARRIBA:

$$(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2\left(\frac{2a^2}{a^2}\right) = 4$$

19) $P(x) = 3x^6 + (1+3i)x^5 + ix^4 + 12x^2 + (4+12i)x + 4i$

Por dato: $P(e^{i(-\frac{\pi}{2})}) = 0$

PERO: $e^{i(-\frac{\pi}{2})} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$

$$\hookrightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \hookrightarrow P(-i) = 0$$

OSEA QUE: $(x+i)$ ES FACTOR DE $P(x)$. DIVIDAMOS POR RUFFINI

| | | | | | | | |
|----|---|------|----|---|----|-------|-----|
| | 3 | 1+3i | i | 0 | 12 | 4+12i | 4i |
| -i | | -3i | -i | 0 | 0 | -12i | -4i |
| | 3 | 1 | 0 | 0 | 12 | 4 | 0 |

$\hookrightarrow P(x) = (x+i)(3x^5 + x^4 + 12x + 4)$

$$= (x+i)[x^4(3x+1) + 4(3x+1)]$$

$$= (x+i)(3x+1)(x^4+4)$$

(*)

$$\begin{aligned}
 \underline{DE(*)}: (*) &= x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
 &= \underbrace{(x^2 + 2x + 2)}_{(x+1)^2 + 1} \underbrace{(x^2 - 2x + 2)}_{(x-1)^2 + 1} \\
 &= [(x+1)^2 + 1][(x-1)^2 + 1] \\
 &= [(x+1)^2 - i^2][(x-1)^2 - i^2]
 \end{aligned}$$

$$P(x) = (x+1+i)(x+1-i)(x-1+i)(x-1-i)$$

En $P(x)$:

$$P(x) = (x+i)(3x+1)(x+1+i)(x+1-i)(x-1+i)(x-1-i)$$

Obs. # DEFECT. PRIMOS DE
COEF. NO REALES: 5

20) TENIENDO EN CUENTA QUE EL
COEFICIENTE DEL POLINOMIO P ,
VIENE DADO POR $a_k = i^{k+1}$; $k \geq 0$
ENTONCES:

$$P(x) = i x^n + i^2 x^{n-1} + i^3 x^{n-2} + \dots + i^{n+1}$$

Aquí:

$$P(i) = \underbrace{i^{n+1} + i^{n+1} + i^{n+1} + \dots + i^{n+1}}_{(n+1) \text{ TÉRMINOS}}$$

$$\rightarrow P(i) = (n+1)i^{n+1} = m i^1 \text{ (DATO)}$$

Obs.: PARA QUE LA IGUALDAD
SE VERIFIQUE: $n = 4$

CON ESTO: $m = 4 + 1$

$$\hookrightarrow \text{NO PIDEN: } P(i^{m+2}) = P(i^{4+3})$$

$$P(i^3) = P(-i)$$

HALLOMOS $P(-i)$:

$$P(-i) = \underbrace{i(-i)^n + i^2(-i)^{n-1} + i^3(-i)^{n-2} + \dots + i^{n+1}}_{(n+1) \text{ TÉRMINOS (\# IMPAR DE TERM.)}}$$

65
CALCULANDO CADA SUMANDO Y TE-
NIENDO EN CUENTA QUE $n=4$, OBTENEMOS:

$$P(-i) = \underbrace{i}_{0} - \underbrace{i}_{0} + \underbrace{i}_{0} - \underbrace{i}_{0} + \dots + \underbrace{i}_{0} - \underbrace{i}_{0} + i$$

$$\therefore P(i^{m+2}) = P(-i) = i$$

21) OBSÉRVESE, LOS RADICANDOS SE
PUEDEN ESCRIBIR COMO SIGUE:

$$* z_1 = \sqrt{(a^2 + b^2 i)^2}$$

$$\Rightarrow z_1 = a^2 + b^2 i$$

$$* z_2 = \sqrt{(b^2 + a^2 i)^2}$$

$$\Rightarrow z_2 = b^2 + a^2 i$$

DONDE:

$$z_1 + z_2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + a^2)i$$

$$\hookrightarrow z_1 + z_2 = (a^2 + b^2)(1+i) = ab(1+i) \text{ (DATO)}$$

DE AQUÍ: $a^2 + b^2 = ab$

DIVIDIDO POR ab : $\frac{a^2 + b^2}{ab} = 1$

DE DOBLADO:

$$\frac{a^{b-1}}{b} + \frac{b^{a-1}}{a} = 1$$

22) ASUMIMOS: $z = r \operatorname{cis} \theta$

$$\hookrightarrow \bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$$

LUEGO:

$$* \frac{z}{\bar{z}} = \frac{r \operatorname{cis} \theta}{r \operatorname{cis}(-\theta)} = \operatorname{cis}(2\theta)$$

ADemás: $\frac{\bar{z}}{z} = \operatorname{cis}(-2\theta)$

REEMPLAZANDO EN EL

DATO:

$$(e^{i3(2\theta)})^3 + (e^{i3(-2\theta)})^3 = 1$$

Por De Moivre:

$$e^{i6\theta} + e^{i(-6\theta)} = 1$$

$$\cos(6\theta) + i\sin(6\theta) + \cos(6\theta) - i\sin(6\theta) = 1$$

$$2\cos(6\theta) = 1$$

$$\rightarrow \cos(6\theta) = \frac{1}{2} \rightarrow 6\theta = \frac{\pi}{3} \text{ o } \frac{5\pi}{3}$$

En cualquier caso: $\cos 18\theta = -1$

23) Siendo $z = e^{i\alpha}$; se tiene:

$$z^n = e^{in\alpha}$$

$$= \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

$$z^{-n} = e^{-in\alpha}$$

$$= \cos n\alpha - i\sin n\alpha$$

$$\text{Sumando: } z^n + \frac{1}{z^n} = \frac{2\cos n\alpha}{\# \text{REAL}}$$

$$\therefore \text{Im}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = 0$$

24) ORDENAMOS PARA APLICAR LEY DE BINOMIO Y DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$$[(a+bi) + (c+di)]^2 + [(a+bi) - (c+di)]^2$$

$$[(a+b) + (c+d)i][(a+b) - (c+d)i]$$

$$= \frac{2[(a+b)^2 - (c+d)^2]}{(a+b)^2 - (c+d)^2}$$

$$= \frac{2[(a+b)^2 - (c+d)^2]}{(a+b)^2 - (c+d)^2} = 2$$

25) Sea:

$$z = (-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)^{1-i} \cdot i^i$$

ESCRIBAMOS LOS NÚMEROS REALES EN FORMA POLAR:

$$z = (e^{i\pi})(e^{i\frac{\pi}{4}})^{1-i} \cdot (e^{i\frac{\pi}{2}})^i$$

AHORAS EN FORMA EXPONENCIAL:

$$= e^{i\pi} \cdot (e^{i\frac{\pi}{4}})^{1-i} \cdot (e^{i\frac{\pi}{2}})^i$$

$$= e^{i\pi} \cdot e^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}i} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\rightarrow z = e^{-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}i}$$

$$\text{DE AQUÍ: } |z| = e^{-\frac{\pi}{4}}; \text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{4}$$

26) Sea $z = a+bi \rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Por condición:

$$\frac{a+bi}{(a+bi)^2+64} = \# \text{REAL}$$

$$\frac{a+bi}{(a^2-b^2+64)+2abi} = \# \text{REAL}$$

RECUERDE

$$\text{SI } \frac{a+bi}{c+di} = \# \text{REAL} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

APLICANDO, SE TIENE:

$$\frac{a}{a^2-b^2+64} = \frac{b}{2ab}$$

$$\rightarrow 2a^2 = a^2 - b^2 + 64$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 = 64 \rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 8$$

$$\therefore |z| = 8$$

$$(27) (*) e^{2n\pi i} = \underbrace{\cos 2n\pi}_1 + i \underbrace{\sin 2n\pi}_0$$

$$\hookrightarrow e^{2n\pi i} = 1 \quad \Diamond (I) \text{ es V}$$

$$(**) e^{\pi i} = \underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_0$$

$$\hookrightarrow e^{\pi i} = -1 \quad \Diamond (II) \text{ es V}$$

$$(***) \text{ Sea } z = a + bi$$

$$\Diamond e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

$$= e^a (\cos b + i \sin b)$$

$$\overline{(e^z)} = \overline{(e^a)} \cdot \overline{(\cos b + i \sin b)}$$

$$= e^a \cdot (\cos b - i \sin b)$$

$$= e^a \cdot e^{-bi}$$

$$= e^{a-bi}$$

$$\Diamond \overline{(e^z)} = e^{\bar{z}} \quad \Diamond (III) \text{ es V}$$

$$(***) \text{ es evidente } (2^1)^{1/3} \neq (8^1)^{1/4}$$

$$\Diamond (IV) \text{ es F}$$

$$\therefore \text{VVVF}$$

28 RECUERDE

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} ; \overline{\bar{z}} = z$$

APLIQUEMOS POR PARTES:

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= \overline{z_1 \bar{z}_2} + \overline{\bar{z}_1 z_2} \\ &= 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 &= \overline{z_1 \bar{z}_2} - \overline{\bar{z}_1 z_2} \\ &= -2 \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) \cdot i \end{aligned}$$

REEMPLAZANDO EN W:

$$W = \frac{2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) - 2 \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) i}{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) - \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) i}$$

$$= \frac{2 [\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) - \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) i]}{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) - \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) i}$$

$$\therefore W = 2$$

29 TRANSFORMAMOS LO PEDIDO:

$$f = \frac{\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}(z(z-5)) + \operatorname{Arg}(z-5)}{\operatorname{Arg}\left(\frac{z-5}{z}\right)}$$

$$\text{DE AQUÍ: } f = \frac{2 [\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}(z-5)]}{\operatorname{Arg}(z-5) - \operatorname{Arg} z} = ?$$

$$\text{POR DATO: } |z|^2 + 25 - 5z - 5\bar{z} = 25$$

$$\text{SI ASUMIMOS } z = x + yi$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 25 - 5(x + yi) - 5(x - yi) = 25$$

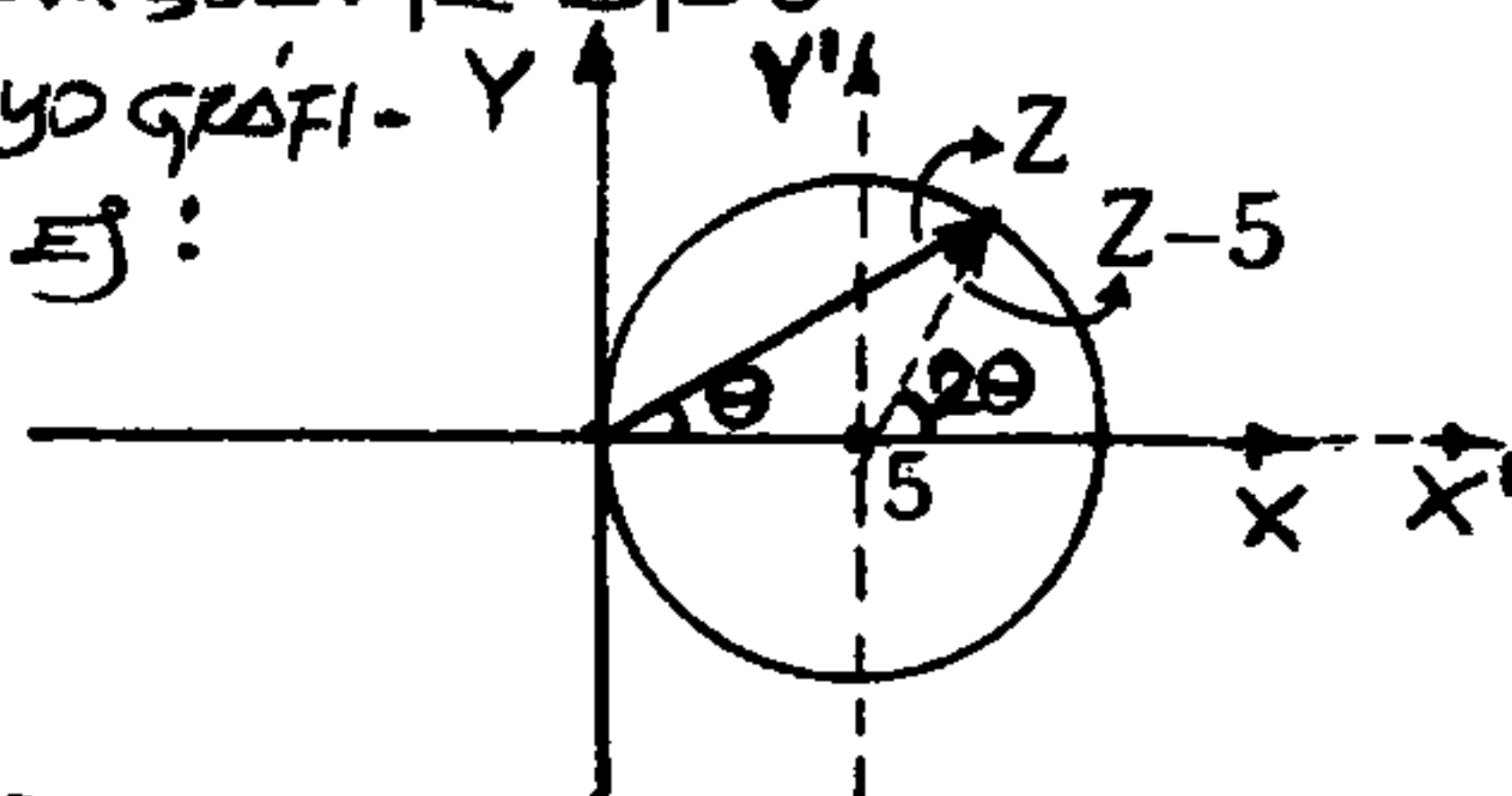
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 25 = 25$$

$$\rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 5^2$$

$$\text{O SEA QUE: } |z-5| = 5$$

CUYO GRÁFI - Y

es:



$$\text{OBS: } \operatorname{Arg}(z-5) = 20 \wedge \operatorname{Arg} z = 0$$

$$\text{EN F: } f = \frac{2(0+20)}{20-0} = \frac{60}{0}$$

$$\therefore f = 6$$

30) ¿SE PUEDE ESCRIBIR:

$$z = \frac{1}{-i} (\sqrt{3} + i) \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) e^{i\pi}$$

TRANSFORMEMOS POR PARTES:

$$\frac{1}{-i} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{-i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt{3} + i \rightarrow \text{MÓDULO} = 2$$

$$\rightarrow \text{Arg}(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\rightarrow \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\rightarrow \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

LUEGO:

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\pi}$$

$$\rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{DE AQUÍ: } |z| = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

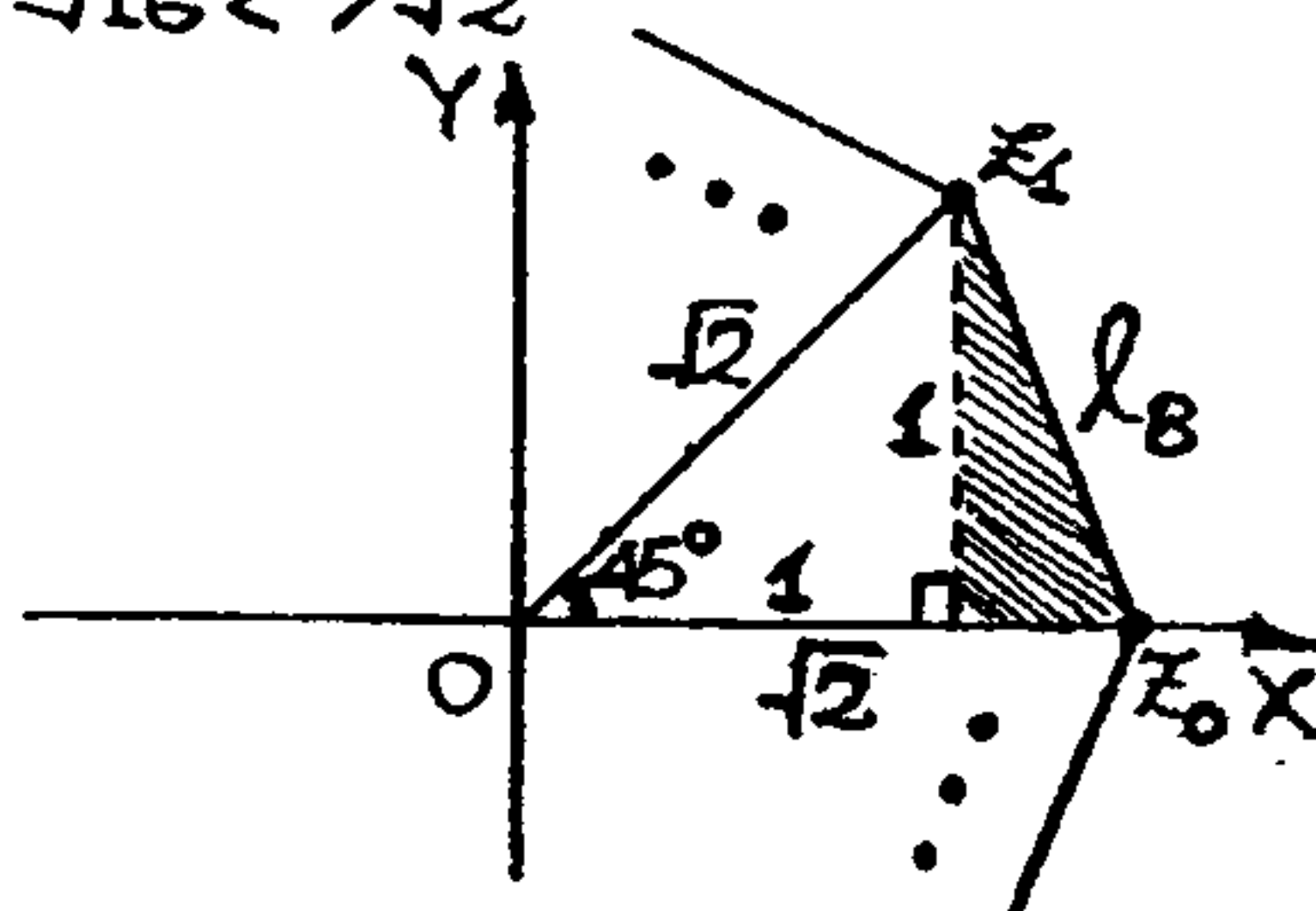
$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$$

31) ESTE PROBLEMA, MÁS QUE ALGEBRAICO ES GEOMÉTRICO.

NOSE PUDEN $\sqrt[8]{16}$

OB: LAS 8 RAÍCES OCTAVAS DE 16 TIENEN EL MISMO MÓDULO; POR TANTO LOS AFIJOS SON LOS VÉRTICES DE UN POLÍGONO REGULAR DE

8 LADOS. EN ESTE CASO EL MÓDULO ES $\sqrt[8]{16} > \sqrt{2}$



BAJAMOS LA PERPENDICULAR AL EJE X. EN EL Δ DE 45° , CADA CATETO VALDRÁ 1, DADO QUE LA HIPOTENUSA VALE $\sqrt{2}$.

EN EL Δ SOMBRADO, POR PITÁGORAS, CALCULEMOS EL LADO DEL OCTÓGONO (l_8): $l_8^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2$

$$\text{DE AQUÍ: } l_8 = \sqrt{4 - \sqrt{8}}$$

$$\text{LUEGO: PERÍMETRO DEL POLÍGONO} = 8\sqrt{4 - \sqrt{8}}$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = 8 \wedge b = 4 \therefore a + b = 12$$

32) SEGÚN CONDICIÓN:

$$\text{SI } z_1 = a + bi \Rightarrow z_2 = c + ai$$

$$\text{DONDE: } z_1 z_2 = (ac - ab) + (a^2 + bc)i$$

$$\text{PERO POR DATO: } z_1 z_2 = 4i$$

$$\Rightarrow ac - ab = 0 \wedge a^2 + bc = 4$$

$$\rightarrow b = c \wedge a^2 + b^2 = 4$$

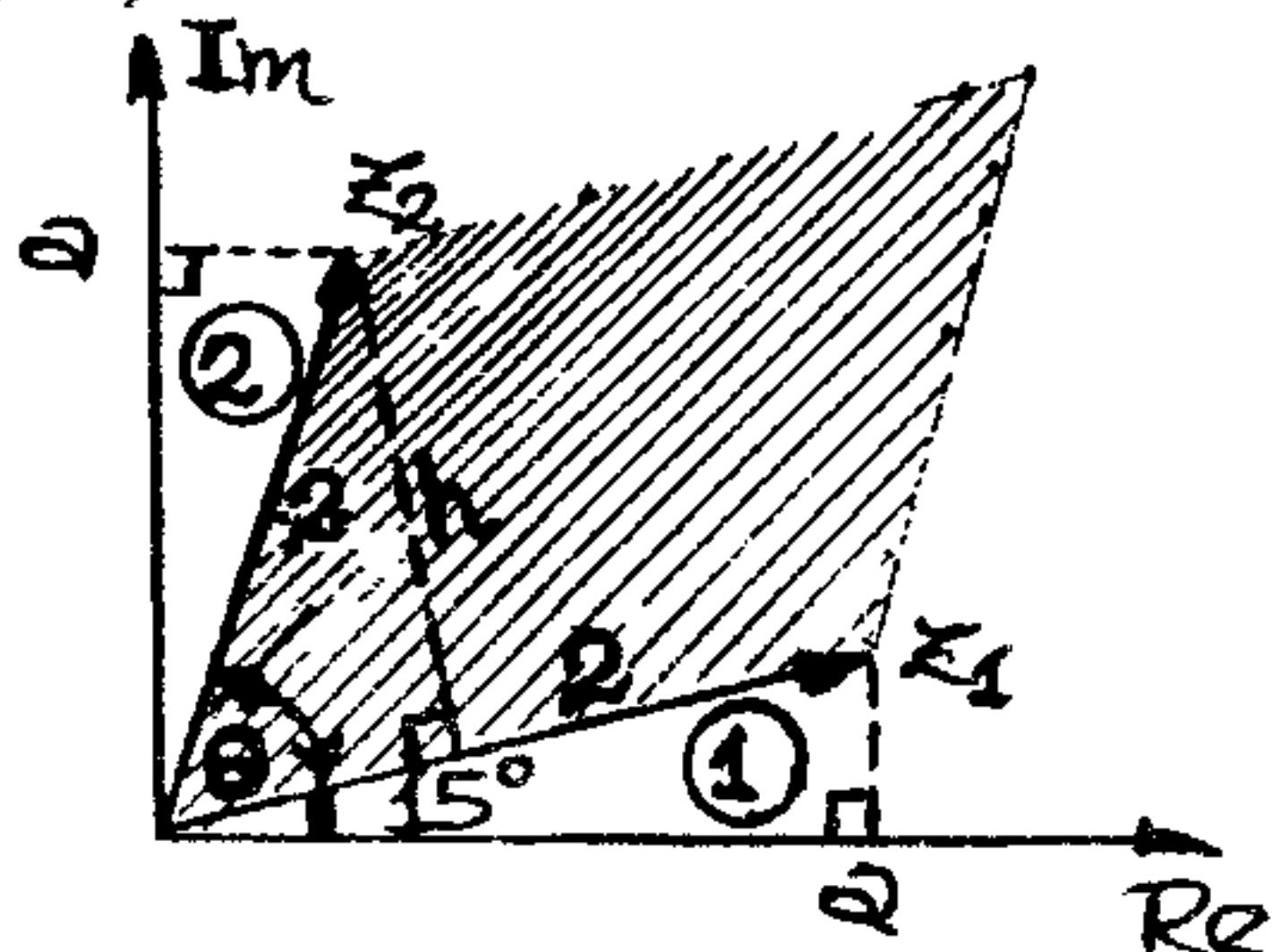
CON ESTO:

$$z_1 = a + bi \wedge z_2 = b + ai$$

$$\text{DONDE: } |z_1| = |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = 2$$

DEL GRÁFICO:



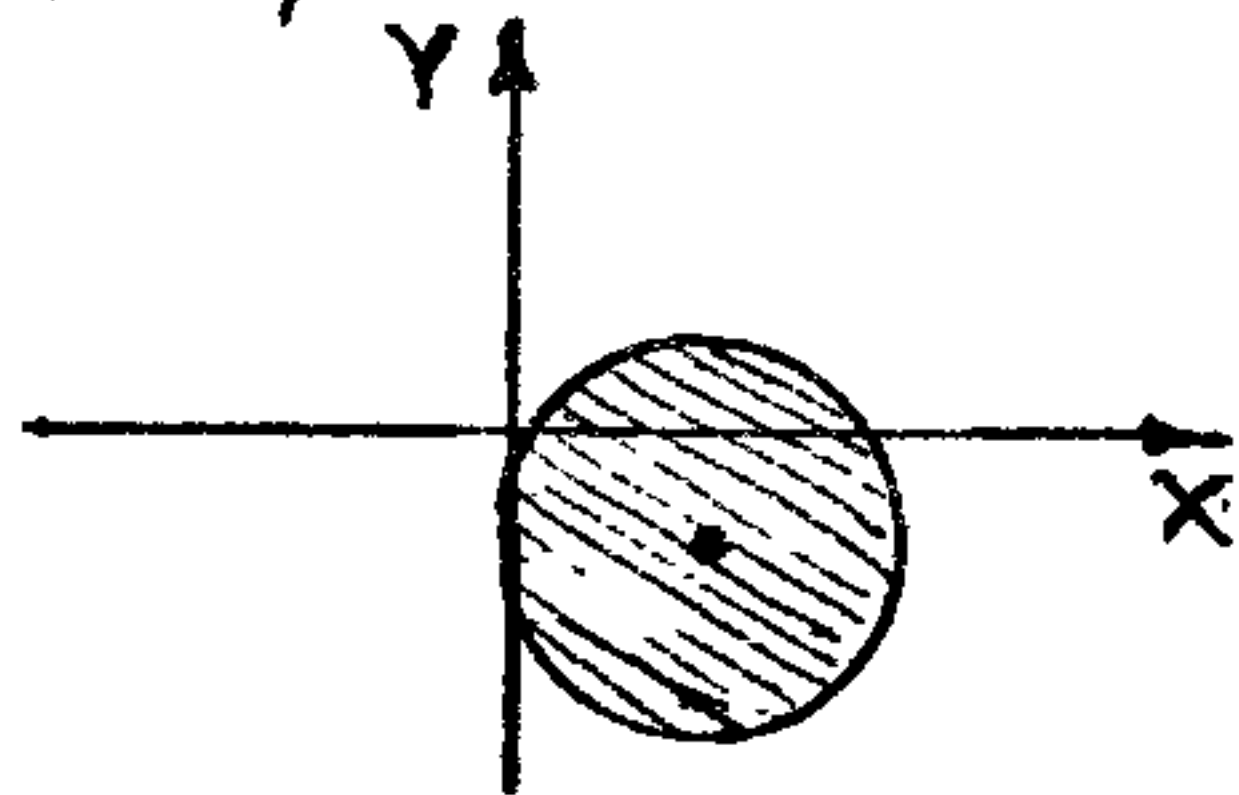
Obs: Los triángulos rectángulos 1 y 2 son iguales (LLL). Con esto, deducimos: $\theta = 60^\circ \Rightarrow h = \sqrt{3}$

Luego:

$$\begin{aligned} \text{ÁREA DEL PARALELOGRAMO} &= b \times h \\ &= 2 \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

33. DE A: Si $z = x + yi$
 $\Rightarrow |(x-2) + (y+1)i| \leq 2$
 $\rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 2$

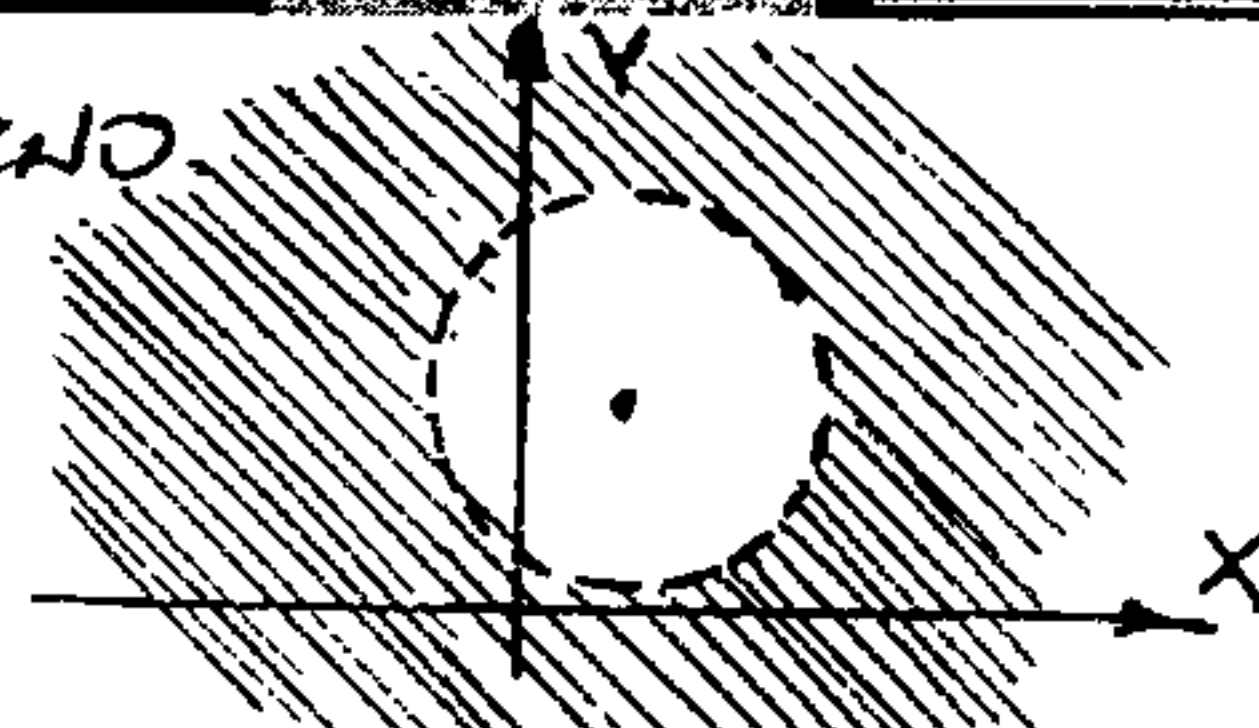
Su representación geométrica viene dado por la parte interna de una \odot (incluye el contorno) con centro en $(2; -1)$ y de radio igual a 2.



DE B: $|i(z - 2i - 1)| > 2$
 $\rightarrow |i| |z - 2i - 1| > 2$
 $\rightarrow |z - 2i - 1| > 2$
 $\rightarrow |(x-1) + (y-2)i| > 2$
 $\rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 > 2^2$

SIMILAR AL ANTERIOR. \odot CON CENTRO EN $(1; 2)$ y RADIO IGUAL A 2; PARTE EXTERNA NO INCLUYE

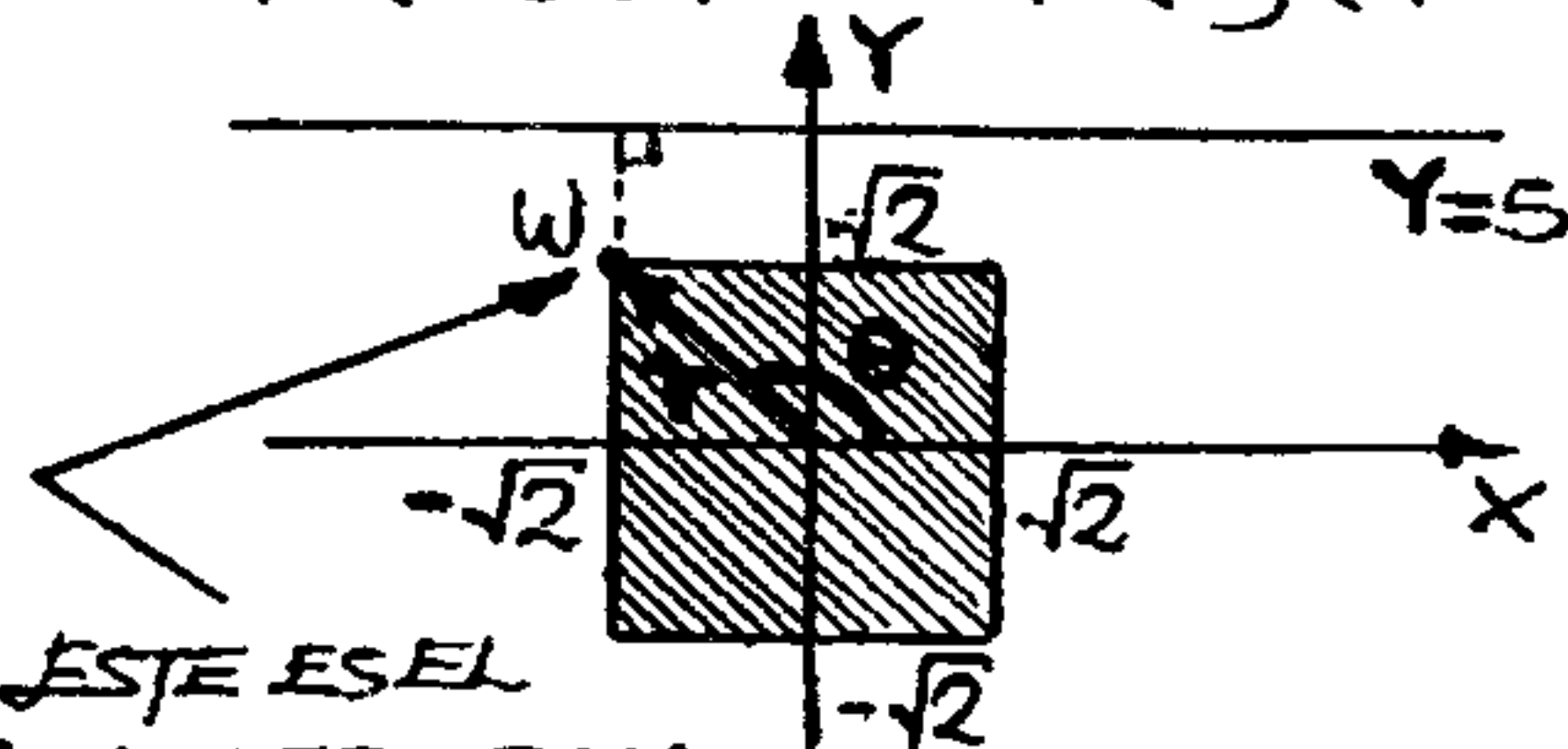
EL CONJUNTO



FINALMENTE: $A \cap B = \text{ALTERNATIVA (A)}$

34. SEA $z = x + yi$

POR DADO: $|x| \leq \sqrt{2} \wedge |y| \leq \sqrt{2}$
 $\rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \wedge -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$



ESTE ES EL COMPLEJO DE MAYOR ARGUMENTO Y MENOR DISTANCIA A LA RECTA $y=5$

VEAMOS θ : $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
 $w = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
 $\Rightarrow w = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \therefore w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

35. SEA $z = a + bi$; SEGÚN CONDICIÓN:
 $z + \frac{1}{z} = \bar{z} \rightarrow z^2 + 1 = z\bar{z}$

$\rightarrow (a+bi)^2 + 1 = (a+bi)(a-bi)$
 $\rightarrow (a^2 - b^2 + 1) + 2abi = (a^2 + b^2)$

DE AQUÍ: $* a^2 - b^2 + 1 = a^2 + b^2 \dots (1)$
 $* 2ab = 0 \dots (2)$

DE (1): $2b^2 = 1 \rightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

EN (2): $2a(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \rightarrow a = 0$

\therefore LOS COMPLEJOS SON:
 $z = 0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i \Rightarrow z = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$

TEORÍA DE ECUACIONES

VIII

CAPÍTULO

Algebra

01 DE $3x^2 - (n-4)x + (n-2) = 0$

* $x_1 + x_2 = \frac{n-4}{3}$ * $x_1 x_2 = \frac{n-2}{3}$

EN LA CONDICIÓN:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1 x_2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{n-4}{3} = \frac{n-2}{3 \cdot 3}$$

$$\rightarrow 3n-12 = n-2 \therefore n=5$$

02 RECUERDE

LA ECUACIÓN $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, TIENE RAÍCES SIMÉTRICAS Y RECÍPROCAS, SI SE CUMPLE:

$$b = 0 \wedge a = c$$

EN EL PROBLEMA:

DE $1024x^2 - (m^2-8)x + n^{10} = 0$

SE DEBE CUMPLIR:

$$-(m^2-8) = 0 \wedge 1024 = n^{10}$$

(1)

(2)

DE (2): $2^{10} = n^{10} \rightarrow n=2$

EN (1): $-(m^2-8) = 0 \rightarrow m^2 = 8$

DE AQUÍ: $m = 2\sqrt{2}$

$\therefore m+n = 2\sqrt{2}+2 = 2(\sqrt{2}+1)$

03 DE $3\left[\frac{1}{2} - \frac{x-1}{x+1}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{9}{x+1} - 1\right]$

OBJ: $x \neq -1$

$$\frac{3}{2} - \frac{3(x-1)}{x+1} = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{3(x-1)}{x+1}$$

$$\rightarrow \frac{7}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{x+1} + \frac{4(x-1)}{x+1}\right)$$

$$\rightarrow 7(x+1) = 3(4x-1)$$

$$\rightarrow 7x+7 = 12x-3$$

$$\rightarrow x=2 \therefore C.S. = \{2\}$$

04 DE LA 1ª ECUACIÓN:

$$2x - 2 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$\Rightarrow 2x = 2(2x-2) \rightarrow x = 2x-2$$

DE LA 2ª ECUACIÓN:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2 + \frac{2}{6}$$

$$\rightarrow \frac{x}{6} = \frac{12+2}{6} \rightarrow x = 12+2$$

SEGÚN CONDICIÓN:

$$* 2x-2 = 12+2 \therefore x=14$$

05 SUPONGAMOS QUE LA RAÍZ EN COMÚN ES α PARA AMBAS ECUACIONES.

REEMPLAZANDO EN LAS ECUACIONES, SE TIENE:

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \dots (I)$$

$$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \dots (II)$$

$$(I) - (II): (2-1)\alpha + 1-2 = 0$$

$$\rightarrow \alpha = -1$$

$$\text{EN (II): } 1+1+2=0 \rightarrow 2=-2$$

• EN LA 1ª ECUACIÓN:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

RAÍZ DOBLE.

• EN LA 2ª ECUACIÓN:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

DE AQUÍ: $x = -2 \vee x = 1$

\therefore MEJOR RAÍZ ES: -2

06 Si r y s son raíces de la ec:

$$2x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow r+s=2 \wedge rs=-\frac{1}{2}$$

LOS PIDEN:

$$(r+1)(s+1) = rs + (r+s) + 1$$

$$= -\frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{5}{2}$$

07 Si α y β son raíces de la ecuación $x^2 - 6x + c = 0$, entonces:

$$\alpha + \beta = 6 \wedge \alpha\beta = c$$

EN LO PEDIDO:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2c}{9} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{9}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2}{9} = \frac{6^2}{9} = 4$$

08 Si la ecuación mostrada

$$x^2 - (m+m^2)x + (m^3-1) = 0$$

TIENE SOLUCIÓN ÚNICA (RAÍCES IGUALES), ENTONCES, SE DEBE CUMPLIR:

DISCRIMINANTE (Δ) = 0

DE LA ECUACIÓN, DADA:

$$\Delta = [-(m+m^2)]^2 - 4(1)(m^3-1) = 0$$

$$\rightarrow m^2 + 2m^3 + m^4 - 4m^3 + 4 = 0$$

$$m^4 - 2m^3 + m^2 + 4 = 0$$

$$(m^2 - m)^2 = -4$$

SACO $\sqrt{}$: $m^2 - m = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

\therefore UN VALOR DE $m^2 - m$ ES: $-2i$

09 Si a y b son raíces de la ecuación $x^2 - tx + 1 = 0$, la

ecuación que admite por

raíces $a-1$ y $b-1$, se ob-

tiene reemplazando en la ecuación anterior la x por

$x+1$; esta ecuación será:

$$(x+1)^2 - t(x+1) + 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 - tx - t + 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 5x - 5 = 0$$

ENTONCES, DE AQUÍ:

$$(a-1) + (b-1) = 5 \wedge (a-1)(b-1) = -5$$

(1)

(2)

$$\therefore (1)^2: (a-1)^2 + 2(a-1)(b-1) + (b-1)^2 = 25$$

(-10)

$$\rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 35$$

• AL CUADRADO:

$$(a-1)^4 + 2(a-1)^2(b-1)^2 + (b-1)^4 = 1225$$

(50)

$$x_1 + x_2 = \sqrt{3} \wedge x_1 x_2 = \sqrt{2}$$

EN LO PEDIDO:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \sqrt{2} = \frac{x_2^2 + x_1^2 + (x_1 x_2)^2 \sqrt{2}}{(x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2) \sqrt{2} (x_1 x_2)}{(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2}{2}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^2}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3}{2}$$

(15) LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR:

$$x^2 - 6x + 9 = x^2$$

$$(x-3)^2 = x^2$$

I. Si $x=0$, SE TIENE: $(x-3)^2 = 0$

DE AQUÍ: $x=3$ SOL. ÚNICA

∴ (I) ES V

II. Si $x < 0 \rightarrow x^2 > 0$

HACIENDO: $x^2 = k$ ($k > 0$)

$$(x-3)^2 = k \rightarrow x-3 = \pm \sqrt{k}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{k}$$

OBJ: ADMITE 2 RAÍCES REALES.

∴ (II) ES F

III. Si $x \neq 0 \rightarrow x^2 > 0$

∴ POR LO ANTERIOR, LA EC.

ADMITE 2 RAÍCES DISTINTAS Y REALES. ∴ (III) ES V

$$\therefore \underline{VFV}$$

$$(16) * x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$$

FACTORICEMOS EL POLINOMIO (POR DIVISORES BINOMIOS):

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ & \downarrow & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ & \downarrow & -1 & 2 & -3 & \\ & 1 & -2 & 3 & 0 & \end{array}$$

DE AQUÍ, TENEMOS:

$$(x-1)(x+1)(x^2-2x+3)=0$$

OBJ: DE $x^2-2x+3=0$

$\rightarrow x \notin \mathbb{R}$, DADO QUE $\Delta = -8 < 0$

ENTONCES: Σ DE RAÍCES ES: 2

(17) RECUERDE

POR PROPIEDAD DE PROPORCIONES (PPP)

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

APLIQUEMOS PPP EN:

$$\frac{x^3+3x-14}{3x^2+1} = \frac{13}{1} \Rightarrow \frac{x^3+3x^2+3x+1-27}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{27}{1}$$

$$\rightarrow \frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = 27$$

$$\text{SACANDO 3ª: } \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1}$$

$$\text{PPP: } \frac{x+x+x-1}{x+1-x+1} = \frac{3+1}{3-1}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \therefore x = 2$$

18) DE LA ECUACIÓN $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Rightarrow S = x_1 + x_2 = 3 \wedge P = x_1 x_2 = 1$$

AHORA, LA ECUACIÓN CUYAS RAÍCES SON S Y P , ES:

$$x^2 - (S+P)x + (SP) = 0$$

REEMPLAZANDO:

$$x^2 - (3+1)x + (3 \times 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

19) DE $(2x-45)^2 - (x-21)^2 = 0$
DIFERENCIA DE \square s

$$\Rightarrow (2x-45+x-21)(2x-45-x+21) = 0$$

$$(3x-66)(x-24) = 0$$

$$\ast 3x-66=0 \rightarrow x_1=22$$

$$\ast x-24=0 \rightarrow x_2=24$$

$$\therefore x_2 - x_1 = 2$$

20) DE $x^2 - 3x + 1 = 0$, SE TIENE:

$$x_1 + x_2 = 3 \wedge x_1 x_2 = 1$$

LO PEDIDO, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$(x_1+4)(x_2+6)(x_1+6)(x_2+4) >$$

$$= [x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16][x_1 x_2 + 6(x_1 + x_2) + 36]$$

REEMPLAZANDO VALORES:

$$= [1+4(3)+16][1+6(3)+36]$$

$$\underline{\text{DE AQUÍ:}} \quad (29)(35) = 1015$$

21) DE $x^2 - 5x + k = 0$, SI α Y β SON SUS RAÍCES, ENTONCES:

$$\alpha + \beta = 5 \quad (1) \quad \wedge \quad \alpha \beta = k \quad (2)$$

AHORA, SEGÚN CONDICIÓN, LAS RAÍCES DE $x^2 - 7x + k = 0$, SON:

$$2\alpha \text{ y } \theta \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + \theta = 7 \quad (3) \quad \wedge \quad (2\alpha)\theta = k \quad (4)$$

$$\cdot (2) = (4): \quad \alpha \beta = 2\alpha \theta \rightarrow \beta = 2\theta$$

$$\underline{\text{EN (1):}} \quad \alpha + 2\theta = 5 \quad (*)$$

$$\underline{\text{DE (3):}} \quad 2\alpha + \theta = 7$$

RESOLVIENDO (*): $\alpha = 3; \theta = 1$

$$\underline{\text{REEMPLAZANDO EN (4):}} \quad k = 6$$

22) TRANSFORMANDO LA ECUACIÓN:

$$2ax + 2b = a - 2bx$$

$$\rightarrow 2(a+b)x = a - 2b$$

$$x = \frac{a-2b}{2(a+b)}$$

ANALICEMOS

I. LA EC. TIENE SOLUCIÓN ÚNICA SI $2(a+b) \neq 0$, ES DECIR: $a \neq -b$

\Rightarrow (I) ES V

II. LA EC. NO TIENE SOLUCIÓN SI $2(a+b) = 0 \wedge a - 2b \neq 0$

ES DECIR: SI $a = -b \wedge a \neq 2b$

\Rightarrow (II) ES F

III. POR LO ANTERIOR (VER II)

\Rightarrow (III) ES V

IV. POR (I) \Rightarrow (IV) ES F

\therefore VFVF

23) RECUERDE

SI LAS ECUACIONES:

$$\begin{cases} \bullet ax^2+bx+c=0; a \neq 0 \\ \bullet mx^2+nx+p=0; m \neq 0 \end{cases}$$

ADMITEN EL MISMO C.S., SE

$$\text{DEBE CUMPLIR: } \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

EN EL PROBLEMA, SE DEBE CUMPLIR:

$$\frac{m+2}{m+1} = \frac{-(n^2+3)}{n+1} = \frac{-2}{-1}$$

(1) (2) (3)

$$\bullet (1)=(3): \frac{m+2}{m+1} = 2$$

$$\rightarrow m+2 = 2m+2 \rightarrow m=0$$

CON ESTO:

$$mn=0 \cdot n = 0$$

24) RECUERDE

LA ECUACIÓN $ax^2+bx+c=0$; $a \neq 0$ A $a, b, c \in \mathbb{R}$, TIENE RAÍCES IMAGINARIAS, SI $\Delta < 0$
 $\bullet \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow$ DISCRIMINANTE

APLICANDO EN LA ECUACIÓN

$$x^2 - nx + 3 = 0$$

SE DEBE CUMPLIR:

$$\Delta = (-n)^2 - 4(1)(3) < 0$$

$$\rightarrow n^2 - 12 < 0$$

$$(n + \sqrt{12})(n - \sqrt{12}) < 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } -\sqrt{12} < n < \sqrt{12}$$

$$-3,46 < n < 3,46$$

\therefore Mayor valor: 3
 Entero de n : 3

25) Si x_1 y x_2 son raíces de la ec.

$$x^2 + (2k+5)x + k = 0$$

\Rightarrow Por condición: $x_1 - x_2 = 3$

USEMOS ESTO:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$(2k+5)^2 - (3)^2 = 4(k)$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 20k + 25 - 9 = 4k$$

$$\rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$(k+2)^2 = 0 \therefore k = -2$$

26) Si α y β son raíces de la ec.

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 5 \wedge \alpha\beta = 1$$

EN LO PEDIDO:

$$\frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2} = \frac{\beta+2+\alpha+2}{(\alpha+2)(\beta+2)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)+4}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+4}$$

$$= \frac{5+4}{1+5+4}$$

$$= \frac{9}{10} = \frac{3}{5}$$

27) RECUERDE

DADO EL POLINOMIO SOBRE LOS RACIONALES

$$P(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \neq 0$$

TENDRÁ RAÍZ CUADRADA

EXACTA, SI $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

APLICANDO EN

$$P(x) = (k-1)x^2 - (k-1)x + 1$$

$$\text{OBJ: } \Delta = [-(k-1)]^2 - 4(k-1)(1) = 0$$

$$\rightarrow (k-1)^2 - 4(k-1) = 0$$

$$\rightarrow (k-1)(k-1-4) = 0$$

$$\rightarrow (k-1)(k-5) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } k = 1 \vee k = 5$$

\therefore 2 VALORES PARA k

28) LA ECUACIÓN DE 2º GRADO

$$x^2 - (n-5)x + 9 = 0$$

❖ TENDRÁ RAÍCES MÚLTIPLES, ES DECIR, RAÍZ DOBLE O TAMBIÉN RAÍCES IGUALES, SI $\Delta = 0$
↳ DISCRIMINANTE

❖ ES DECIR:

$$\Delta = [-(n-5)]^2 - 4(1)(9) = 0$$

$$\rightarrow (n-5)^2 - 6^2 = 0$$

$$(n-5+6)(n-5-6) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } n = -1 \vee n = 11$$

POR DATO: $n \in \mathbb{R}^+$

$$\therefore n = 11$$

ECUACIONES POLINOMIALES DE GRADO SUPERIOR

Algebra

IX

CAPITULO

01) Si $x_1 = a$ y $x_2 = c$ son raíces de $x^2 + (a+1)x + c = 0$, se tiene:

$$x_1 + x_2 = a + c = -(a+1) \dots (1)$$

$$\text{y } x_1 x_2 = ac = c \rightarrow a = 1$$

$$\text{En (1): } 1 + c = -2 \rightarrow c = -3$$

Según condición $x_1 = a$; $x_2 = c$

y x_3 son raíces de la ecuación:

$$x^3 + bx^2 + (1-6b)x + 3 = 0 \dots (I)$$

de aquí, por Cardano-Viete:

$$x_1 x_2 x_3 = -3 \rightarrow (-3)x_3 = -3$$

$$\text{Obs: } x_3 = 1$$

¡Esta debe satisfacer (I)!

Reemplazando en (I):

$$1 + b + 1 - 6b + 3 = 0$$

$$\rightarrow 5b = 5 \rightarrow b = 1$$

$$\therefore a + 2c + 3b = 1 - 6 + 3 = -2$$

02) DE LA 1ª ECUACIÓN:

$$ax^2 + 2ax + a + bx + b - c = 0$$

$$\{ ax^2 + (2a+b)x + (a+b-c) = 0$$

$$\text{La 2ª } \rightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$$

Si éstas admiten el mismo C.S.

Se debe cumplir:

$$\frac{a}{1} = \frac{2a+b}{3} = \frac{a+b-c}{3}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3)$$

$$\text{DE (1) = (2): } 3a = 2a + b \rightarrow a = b$$

$$\text{DE (1) = (3): } 3a = 2a - c \rightarrow a = -c$$

$$\text{DE ESTO: } -a = c$$

EN LO PEDIDO:

$$a + b + 2c = 2a + 2(-a) = 0$$

03) DE LA ECUACIÓN DADA, PODEMOS DECIR:

LA EC. EN VARIABLE $(x+3)$ ADMITE POR RAÍCES A:

$$x+3 = \sqrt{3} ; x+3 = i$$

LUEGO, SI HACEMOS $x+3 = y$, TENEMOS LA ECUACIÓN EN VARIABLE y :

$$y^4 + my^2 + ny + p = 0 \quad (\alpha)$$

QUE ADMITE POR RAÍCES A

$$y = \sqrt{3} ; y = i$$

COMO $m, n, p \in \mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{R}$ POR PARIDAD DE RAÍCES, SON TAMBIÉN

$$\text{RAÍCES: } y = -\sqrt{3} ; y = -i$$

LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR:

$$(y - \sqrt{3})(y - i)(y + \sqrt{3})(y + i) = 0$$

EFFECTUANDO:

$$(y^2 - 3)(y^2 + 1) = 0$$

$$\rightarrow y^4 - 2y^2 - 3 = 0 \quad (\beta)$$

DE (α) y (β), IDENTIFICANDO:

$$m = -2 ; n = 0 ; p = -3$$

$$\therefore m + n + p = -5$$

04) TRANSFORMANDO LA ECUACIÓN

$$\frac{x + x^2 - 9}{x - 3} = a$$

$$\text{DE AQUÍ: } x^2 - ax + 3a = 0$$

Obs: Si la EC. es incompatible en \mathbb{R} , QUIERE DECIR, QUE ADMITE

TE SOLUCIÓN EN \mathbb{C} ; PARA QUE ESTO OCURRA, SE DEBE CUMPLIR:

$$\Delta < 0$$

↳ DISCRIMINANTE

$$\rightarrow (-3)^2 - 4(33) < 0$$

$$\rightarrow 9 - 132 < 0 \rightarrow 3(3-44) < 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } 0 < 3 < 44$$

COMO $3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 = 1; 2; 3; \dots; 43$

$\therefore 3$ TOMA 43 VALORES

05) TRANSFORMANDO LA ECUACIÓN:

$$\frac{9+x(x-2)}{x-2} = 3+2$$

$$\rightarrow 9+x^2-2x = (3+2)x - 2(3+2)$$

DE AQUÍ:

$$x^2 - (3+4)x + (23+13) = 0$$

COMO ESTA EC. CUADRÁTICA ADMITE C.S. = $\{b\}$ (SOL. ÚNICA)

QUIERE DECIR QUE TIENE SUS DOS RAÍCES IGUALES; POR TANTO:

$$\Delta = 0$$

↳ DISCRIMINANTE

VEAMOS:

$$[-(3+4)]^2 - 4(1)(23+13) = 0$$

$$\rightarrow 3^2 + 83 + 16 - 83 - 52 = 0$$

$$\rightarrow 3^2 - 36 = 0$$

$$(3+6)(3-6) = 0 \quad \text{DATO}$$

$$\text{DE AQUÍ: } 3 = -6 \vee 3 = 6 \quad (3 \neq 0)$$

EN LA ECUACIÓN:

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \rightarrow (x-5)^2 = 0$$

$$\text{DE ACÁ: } x = 5 = b$$

$$\therefore 3+b = 6+5 = 11$$

$$06) \text{ ECUACIÓN: } x^2 + mx + n = 0$$

$$\text{OJO: } m \in \mathbb{Q} \wedge n \in \mathbb{Z}$$

COMO UNA RAÍZ ES $\sqrt{2}-1$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}-1$$

$$\text{ó } x - \sqrt{2} = -1$$

ELEVANDO AL CUADRADO:

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 1$$

$$\rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

$$\text{IDENTIFICANDO: } m = -2\sqrt{2} \wedge n = 1$$

$$\therefore m^2 + n^2 = (-2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 9$$

07) SI AMBAS ECUACIONES POSEEN UNA RAÍZ RACIONAL COMÚN, ENTONCES, SI RESTAMOS AMBAS ECUACIONES, LA ECUACIÓN RESULTANTE TAMBIÉN ADMITIRÁ A DICHA RAÍZ RACIONAL COMÚN.

• RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO, SE OBTIENE:

$$8x(x^2+1) + m(4x) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^3 + (8+4m)x + 3 = 0$$

DE AQUÍ, LAS POSIBLES RAÍCES RACIONALES, VIENE DADO POR EL

$$\text{COEFICIENTE: } \pm \left\{ \frac{\text{DIVISORES DE 3}}{\text{DIVISORES DE 8}} \right\}$$

$$\text{ES DECIR: } \pm \left\{ \frac{1; 3}{1; 2; 4; 8} \right\}$$

OBJ: EL # DE POSIBLES

RAÍCES RACIONALES ES: 16

DONDE, POR CADA RAÍZ REEMPLAZADA EN LA ECUACIÓN SE OBTENDRÁ UN VALOR PARA "m".

\therefore "m" TOMA 16 POSIBLES VALORES

$$\textcircled{08} \begin{cases} a+b+c-x=m \\ a+b-c+x=n \end{cases} \quad (+)$$

$$\Rightarrow 2(a+b) = m+n$$

REEMPLAZANDO EN LA ECUACIÓN:

$$\frac{m^3+n^3}{m^2+n^2} = m+n$$

$$\rightarrow (m+n)(m^2-mn+n^2) = (m+n)(m^2+n^2)$$

$$\text{OBS: } m+n=0 \rightarrow 2(a+b)=0$$

¡NO HAY SOL.!

DE LO QUE QUEDA:

$$\cancel{m^2-mn+n^2} = \cancel{m^2+n^2}$$

$$\rightarrow mn=0$$

REPONIENDO:

$$(a+b+c-x)(a+b-c+x)=0$$

$$\neq a+b+c-x=0 \rightarrow x=a+b+c$$

$$\neq a+b-c+x=0 \rightarrow x=c-a-b$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{a+b+c; c-a-b\}$$

$\textcircled{09}$ Si a, b, c son raíces de la ecuación $x^3-x+1=0$, por CARDANO-VIETE, SE TIENE:

$$a+b+c=0$$

$$ab+bc+ac=-1$$

$$abc=-1$$

SEA LO PEDIDO E :

$$\Rightarrow E = a^5 + a^4 + b^5 + b^4 + c^5 + c^4$$

$$= (a^5 + b^5 + c^5) + (a^4 + b^4 + c^4)$$

PERO POR PRODUCTOS NOTABLES SE CONOCE QUE:

$$\text{SI } a+b+c=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^5+b^5+c^5 = -5abc(ab+bc+ac) \\ a^4+b^4+c^4 = 2(ab+bc+ac)^2 \end{cases}$$

REEMPLAZANDO VALORES EN LAS 2 ANTERIORES, SE TIENE:

$$+a^5+b^5+c^5 = -5(-1)(-1)$$

$$\rightarrow a^5+b^5+c^5 = -5$$

$$+a^4+b^4+c^4 = 2(-1)^2$$

$$\rightarrow a^4+b^4+c^4 = 2$$

LUEGO:

$$E = (-5) + (2) = -3$$

$$\textcircled{10} x^5 - 5x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

ONDE: $a, b, c \in \mathbb{R}$

Si $x_1 = 2 + \sqrt{2} \rightarrow$ OTRA RAÍZ DE LA ECUACIÓN ES $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

ADemás: $x_3 = \alpha$; $x_4 = \beta$; $x_5 = \theta$

ONDE, POR CARDANO-VIETE:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

$$\frac{5}{4} \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{4}$$

LOS PIDEN, SUMA DE PRODUCTOS

BINARIOS DE x_3, x_4 y x_5 .

Por CARDANO-VIETE:

$$\underline{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5},$$

$$\underline{+ x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_4}$$

$$+ x_3 x_5 + x_4 x_5 = 0$$

$$2 + x_1 \underbrace{(x_3 + x_4 + x_5)}_{(1)} + x_2 \underbrace{(x_3 + x_4 + x_5)}_{(1)}$$

$$+ x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5 = 0$$

$$\rightarrow 2 + (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})$$

$$+ x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5 = 0$$

DE AQUÍ:

$$x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5 = -6$$

11) SI $x=1$ ES RAÍZ DE LA ECUACIÓN $x^3+(m-1)x^2+(3m-1)x-19=0$ \Rightarrow POR PARIDAD DE RAÍCES, OTRO RAÍZ SERÁ: $x_2=2-\sqrt{3}$
 \Rightarrow ESTE VALOR DEBE SATISFACER A LA ECUACIÓN DADA:
 $1^3+(m-1)1^2+(3m-1)1-19=0$
 $1+m-1+3m-1-19=0$
 $\rightarrow 4m=20 \therefore m=5$

JUEGO, ES FACTOR DE $P(x)$
 $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$

$$(x-2)^2-3=x^2-4x+1$$

ONDE $P(x)$ SERÁ DIVISIBLE POR DICHO FACTOR.

DIVIDAMOS POR HORNER:

| | 1 | 1 | 1 | m | n |
|----|---|---|---|----|----|
| 4 | | | 4 | -1 | |
| -1 | | | | 20 | -5 |
| | 1 | 5 | | 0 | 0 |

DIV. EXACTA

OB: $m+19=0 \rightarrow m=-19$

$n-5=0 \rightarrow n=5$

$$\therefore m+n=-14$$

12) DE $x^n-ax^{n-1}+bx-2n=0$
 $(a>0 \text{ ES DATO})$

Por CARDANO-VIETE:

* PRODUCTO DE RAÍCES $= (-1)^n(-2n)$

* SUMA DE RAÍCES $= a$

Por DATO: $(-1)^n(-2n)=5(a)$
 ES(-) ES(+)

DADO QUE $a>0 \wedge n>3$

\Rightarrow PARA QUE SE CUMPLA LA IGUALDAD, n DEBE SER IMPAR

LUEGO, AHÍ: $(-1)(-2n)=5a$

$$\rightarrow 2n=5a \rightarrow n=5$$

COMO "a" ES UNA RAÍZ (DATO),
 \Rightarrow ESTE VALOR DEBE SATISFACER LA ECUACIÓN, REEMPLAZAN

$$DO: a^n-2a^{n-1}+ba-2.5=0$$

$$\rightarrow 2b=5a \rightarrow b=5$$

$$\therefore n+b=10$$

13) Si $x_1=2+\sqrt{3}$ ES RAÍZ DE

14) SI $x=\frac{5}{3\sqrt{2}-1}$ ES UNA RAÍZ DE

$$x^3+mx^2+nx+p=0 \quad m,n,p \in \mathbb{Q}$$

TAMBIÉN PODEMOS DECIR QUE

$$3\sqrt{2}-1=\frac{5}{x} \quad \text{ó} \quad 3\sqrt{2}=\frac{5+x}{x}$$

ESTA ECUACIÓN ADMITE POR RAÍZ A LA RAÍZ DE LA ECUACIÓN DADA!

ELEVANDO AL CUBO, LA ECUACIÓN OBTENIDA TAMBIÉN ADMITE A LA RAÍZ INICIAL.

$$\Rightarrow 2=\frac{5^3+3(5)^2x+3(5)x^2+x^3}{x^3}$$

DE AQUÍ, OBTENEMOS:

$$x^3 - 15x^2 - 75x - 125 = 0$$

IDENTIFICANDO CON LA ECUACIÓN

$$\text{DADA: } m = -15; n = -75; p = -125$$

$$\therefore m + n + p = -215$$

15) LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR:

$$x^4 - 2(\lambda - 1)x^2 + \lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\begin{array}{c} x^2 \quad \quad \quad -\lambda \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ x^2 \quad \quad \quad -(\lambda - 2) \end{array}$$

$$(x^2 - \lambda)(x^2 - (\lambda - 2)) = 0$$

$$\rightarrow x^2 = \lambda \quad \vee \quad x^2 = \lambda - 2$$

(1)
(2)

• DE (1): PARA OBTENER POR LO MENOS UNA RAÍZ REAL: $\lambda \geq 0$

• DE (2): PARA OBTENER POR LO MENOS UNA RAÍZ IMAGINARIA:

$$\lambda - 2 < 0 \rightarrow \lambda < 2$$

$$\text{FINALMENTE: } 0 \leq \lambda < 2$$

16) SI $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ ES RAÍZ DE

$$3x^3 + ax^2 + bx + 18 = 0$$

DONDE $a, b \in \mathbb{Q}$

➤ POR PARIDAD DE RAÍCES, OTRA RAÍZ SERÁ: $x_2 = 1 - \sqrt{3}$

$$\text{DE AQUÍ, OBT: } x_1 x_2 = -2$$

PERO DE LA ECUACIÓN:

$$\underbrace{x_1 x_2 x_3}_{(-2)} = -6 \rightarrow x_3 = 3$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2 + 3^2$$

$$= 2(1^2 + 3) + 9$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 17$$

17) SI x_1, x_2 Y x_3 SON RAÍCES DE

$$x^3 - 2x^2 + bx - c = 0$$

DONDE $x_1 = \eta$ Y $x_2 = -\eta$ (CONDICIÓN)

LUEGO, POR CARDANO-VIETE:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{\text{suma}} = 2 \rightarrow \underbrace{x_3}_{\text{suma}} = 2$$

➤ ÉSTA RAÍZ DEBE SATISFACER LA ECUACIÓN PROPUESTA:

$$\rightarrow 2^3 - 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 - c = 0$$

$$\rightarrow 2b - c = 0 \quad \text{ó} \quad c - 2b = 0$$

18) SEAN a, b, c LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN $x^3 + 2x^2 + mx - 4 = 0$

DONDE SÓLO $a > 0$

$$\text{CONDICIÓN: } a^2 = b^2 + c^2 \dots (1)$$

DE LA EC. POR CARDANO-VIETE:

$$a + b + c = -2$$

$$\rightarrow b + c = -2 - a$$

$$\bullet \text{ AL } \square: b^2 + c^2 + 2bc = 4 + 4a + a^2$$

$$\text{ó } b^2 + c^2 = 4 + 4a + a^2 - 2(bc) \dots (2)$$

$$\text{PERO: } abc = 4 \rightarrow bc = \frac{4}{a}$$

$$\text{EN (2): } a^2 = 4 + 4a + a^2 - 2\left(\frac{4}{a}\right)$$

$$\text{DE AQUÍ: } a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a + 2)(a - 1) = 0$$

$$\rightarrow a = -2 \vee a = 1 \quad (a > 0)$$

19) DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

$$2x^4 + 48x^2 + b = 0$$

Sus raíces son:

$$x_1 = \alpha; x_2 = -\alpha; x_3 = \beta; x_4 = -\beta$$

Donde por condición:

$$x_1 = x_3 \rightarrow \alpha = \beta$$

$$\text{O sea que: } x_2 = x_4$$

Además, por propiedad:

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = -(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{48}{2}$$

$$\text{Donde: } \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{48}{2}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \alpha^2 \beta^2 = \frac{b}{2}$$

En la condición:

$$(x_2 x_4)^{-1} + (x_1 x_3)^{-1} = 12$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 12$$

$$\rightarrow \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2 \beta^2} = 12$$

$$\rightarrow \frac{-48}{\frac{b}{2}} = 12 \rightarrow 12b = -48$$

$$\therefore b = -4$$

20) Sea la raíz imaginaria,

$$x_1 = a + bi \text{ (multiplicidad dos o raíz doble)}$$

\Rightarrow También será raíz, $x_2 = a - bi$ (también será raíz doble)

Dado que las imaginarias se presentan con sus conjugadas cuando la ecuación presenta coeficientes racionales, en este caso.

Como la ecuación es de 3º grado

y hasta aquí hay 2 soluciones, teniendo 3 (como dice el problema), entonces, la 3ª solución es:

$$x_3 = m \text{ (raíz de multiplicidad 5)}$$

Por condición:

• Σ de soluciones:

$$(a + bi) + (a - bi) + m = 10$$

$$\rightarrow 2a + m = 10 \dots (1)$$

• Σ de raíces:

$$2(a + bi) + 2(a - bi) + 5m = 29$$

$$\rightarrow 4a + 5m = 29 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2):

$$m = 3 \text{ y } a = \frac{7}{2} = \text{Re}(x_1)$$

21) Supongamos que $x = \alpha$ sea raíz de multiplicidad 2 de

$$P(x) = x^3 + 3px + q = 0$$

Φ es factor de $P(x)$, $(x - \alpha)^2$

es decir: $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$

Luego $P(x)$ es divisible por $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$

• Dividimos por Horner:

| | | | | |
|-----------------|---|----|-----------------|------------------|
| 1 | 1 | 0 | 3p | q |
| 2α | | 2α | -α ² | |
| -α ² | | | 4α ² | -2α ³ |
| | 1 | 2α | 0 | 0 |

DIV. EXACTA

$$\text{Obs: } * 3p + 3\alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha^2 = -p \dots (1)$$

$$* q - 2\alpha^3 = 0 \rightarrow \alpha^3 = \frac{q}{2} \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \cdot (1)^3: \alpha^6 &= -p^3 \\ \cdot (2)^2: \alpha^6 &= \frac{q^2}{4} \end{aligned} \rightarrow \text{IGUALANDO: } -p^3 = \frac{q^2}{4}$$

$$\text{DE AQUÍ: } q^2 + 4p^3 = 0$$

(22) Si x_1, x_2, x_3, x_4 son raíces de $3x^4 + (n^2 - \frac{n}{9})x^2 + n = 0$

DE AQUÍ: $x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{n}{3}$

DATO
 $\rightarrow \frac{n}{9} \cdot x_4 = \frac{n}{3} \rightarrow x_4 = 3$
 ¡ESTE VALOR DEBE SATISFACER LA ECUACIÓN DADA!

DE AQUÍ: $3(3)^4 + (n^2 - \frac{n}{9})(3)^2 + n = 0$

$$243 + 9n^2 - n + n = 0$$

$$\rightarrow 9n^2 = -27 \rightarrow n^2 = -3$$

$$\therefore n = \pm 3\sqrt{-1}$$

(23) SIMILAR AL PROBLEMA 21 (REVISAR).

OJO: RAÍZ DE MULTIPLICIDAD 2 ES EQUIVALENTE A RAÍZ DOBLE.

DE AQUÍ: $x^5 + 2x + 6^2$ ES DIVISIBLE POR $x^2 - 2mx + m^2$

DIVIDIMOS POR HORNER:

| | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 ² |
|-----------------|---|----|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| 2m | | 2m | -m ² | | | |
| -m ² | | | 4m ² | -2m ³ | | |
| | | | | 6m ³ | -3m ⁴ | |
| | | | | | 8m ⁴ | -4m ⁵ |
| | 1 | 2m | 3m ² | 4m ³ | 0 | 0 |
| | | | | | DIV. EX. | |

DE AQUÍ: $2 + 5m^4 = 0 \rightarrow 5m^4 = -2$
 $\therefore \frac{5m^4}{5} = \frac{-2}{5}$

(24) DE LA ECUACIÓN:

$$x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 + 6 = 0$$

(*) COMO LA ECUACIÓN ES DE 5º GRADO, A LO MÁS PUEDE TENER 5 RAÍCES (NO INTERESA EL VALOR NUMÉRICO DE b). DE AQUÍ (I) ES F

(**) $x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 - 10^{-4} = 0$

DE ACUERDO A LA VARIACIÓN DE SIGNOS DEL POLINOMIO, SE TENDRÍA 5 RAÍCES REALES DE AQUÍ (II) ES V

(***) $x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 = 0$

$$\rightarrow x^2(x^3 - 4x^2 + x + 6) = 0$$

FACTORIZANDO SE TIENE:
 $(x-2)(x-3)(x+1)$

$$\rightarrow x^2(x-2)(x-3)(x+1) = 0$$

OBS: 0 es raíz doble DE AQUÍ (III) ES V

$$\therefore FVV$$

(25) FACTORIZAMOS EL POLINOMIO HACIENDO QUITA Y PON, ADEMÁS, DESDOBLAMOS (VERIFIQUE), P(x) SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^7 - x^6 + x^5 + x^6 - x^5 + x^4 \\ &\quad - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x^2 + 2x \\ &\quad - x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

FACTORIZANDO EN LOS TÉRMINOS SEÑALADOS, SE TIENE:

$$P(x) = x^5(x^2 - x + 1) + x^4(x^2 - x + 1) - 2x^3(x^2 - x + 1) + 2x(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) = 0$$

EXTRAEMOS FACTOR $(x^2 - x + 1)$:

$$P(x) = (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x - 1) = 0 \quad (*)$$

FACTORIZEMOS (*):

HAGAMOS GRUPO Y PON, Y DES-
DOBLE (VERIFIQUE):

$$(*) = x^5 + x^4 - x^3 - x^3 - x^2 + x + x^2 + x - 1$$

$$= x^3(x^2 + x - 1) - x(x^2 + x - 1) + (x^2 + x - 1)$$

$$P(x) = (x^2 + x - 1)(x^3 - x + 1)$$

LUEGO:

$$P(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)(x^3 - x + 1) = 0$$

$$\Delta = -3 \quad \Delta = 5 \quad \Delta = \frac{23}{108}$$

DE ACUERDO AL DISCRIMINANTE
CONCLUIMOS:

* $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow$ TIENE 2 RAÍCES
IMAGINARIAS

* $x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow$ TIENE 2 RAÍCES
REALES

* $x^3 - x + 1 = 0 \rightarrow$ TIENE 1 RAÍZ
REAL Y 2 IMAGINARIAS.

LA ECUACIÓN PRESENTA 3 RAÍ-
CES REALES Y 4 IMAGINARIAS.

\Rightarrow (I) es V; (II) es F; (III) es F

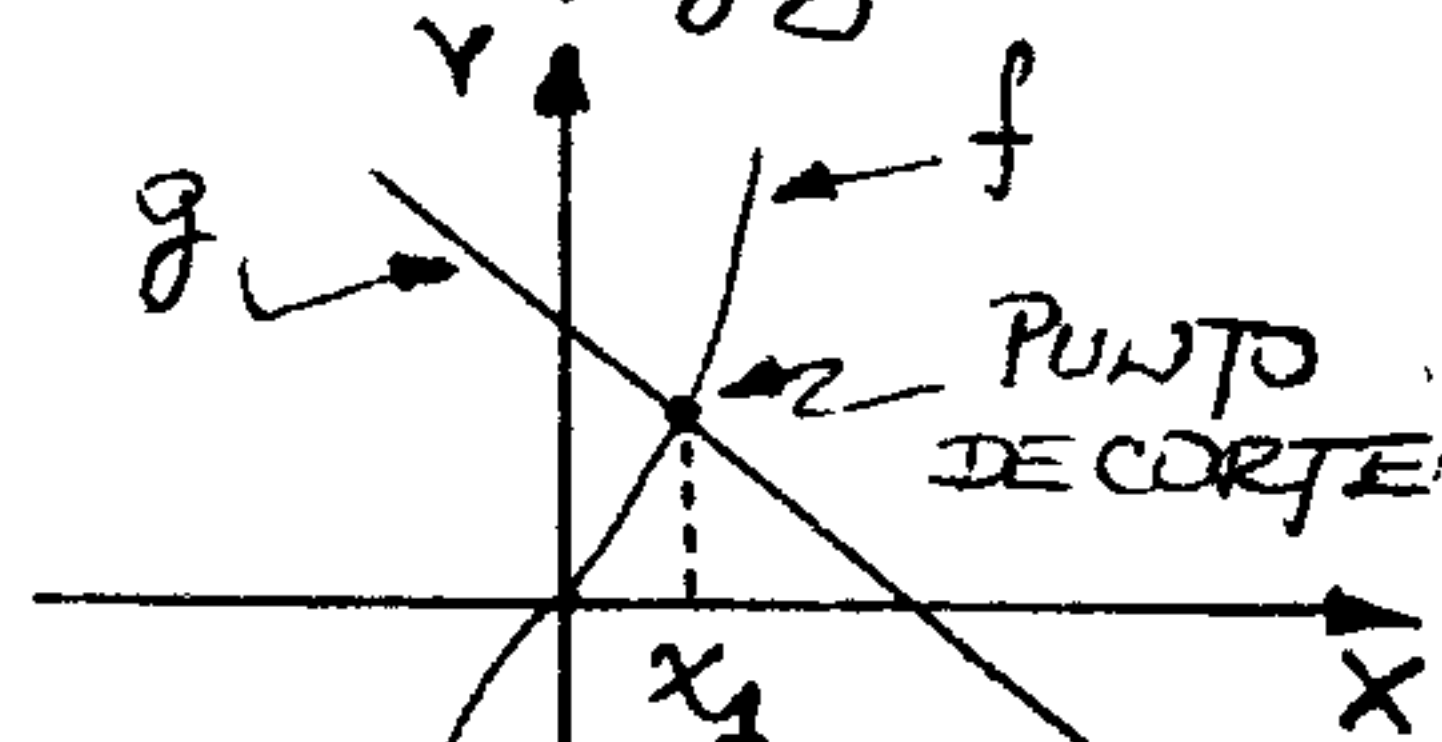
\therefore VFF

26) LA ECUACIÓN LA ESCRIBIMOS:

$$x^7 = -p^2x + q^2$$

$$f(x) \quad g(x)$$

GRAFICAMOS f y g (APROX.)



Obs: SEGÚN LA GRÁFICA, LA ECUA-
CIÓN TIENE UNA SOLUCIÓN REAL (Y)
COMO LA ECUACIÓN ES DE GRADO 7
 \Rightarrow LAS 6 RESTANTES SON IMAGI-
NARIAS

DE LA ECUACIÓN $x^7 + p^2x - q^2 = 0$
POR CARDANO - VIETE:

PRODUCTO DE
LAS 7 RAÍCES = q^2

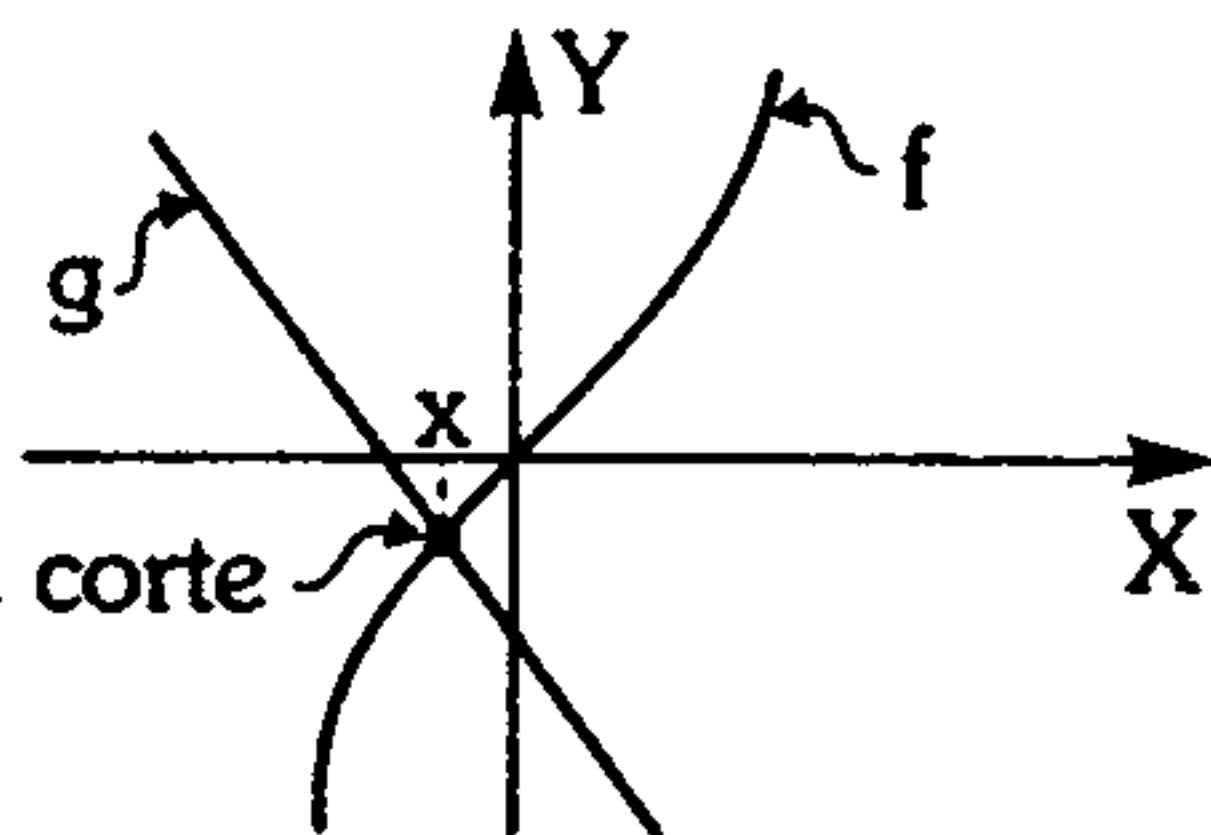
\therefore PRODUCTO DE LAS
RAÍCES IMAGINARIAS: $\frac{q^2}{r}$
(6 RAÍCES)

27) SIMILAR A LA RESOLUCIÓN ANTE-
RIOR: $x^7 = -2x - 2$

$$f \quad g$$

(I) SI $\theta = 0 \rightarrow x = \sqrt[7]{-2}$
UNA SOL. REAL.

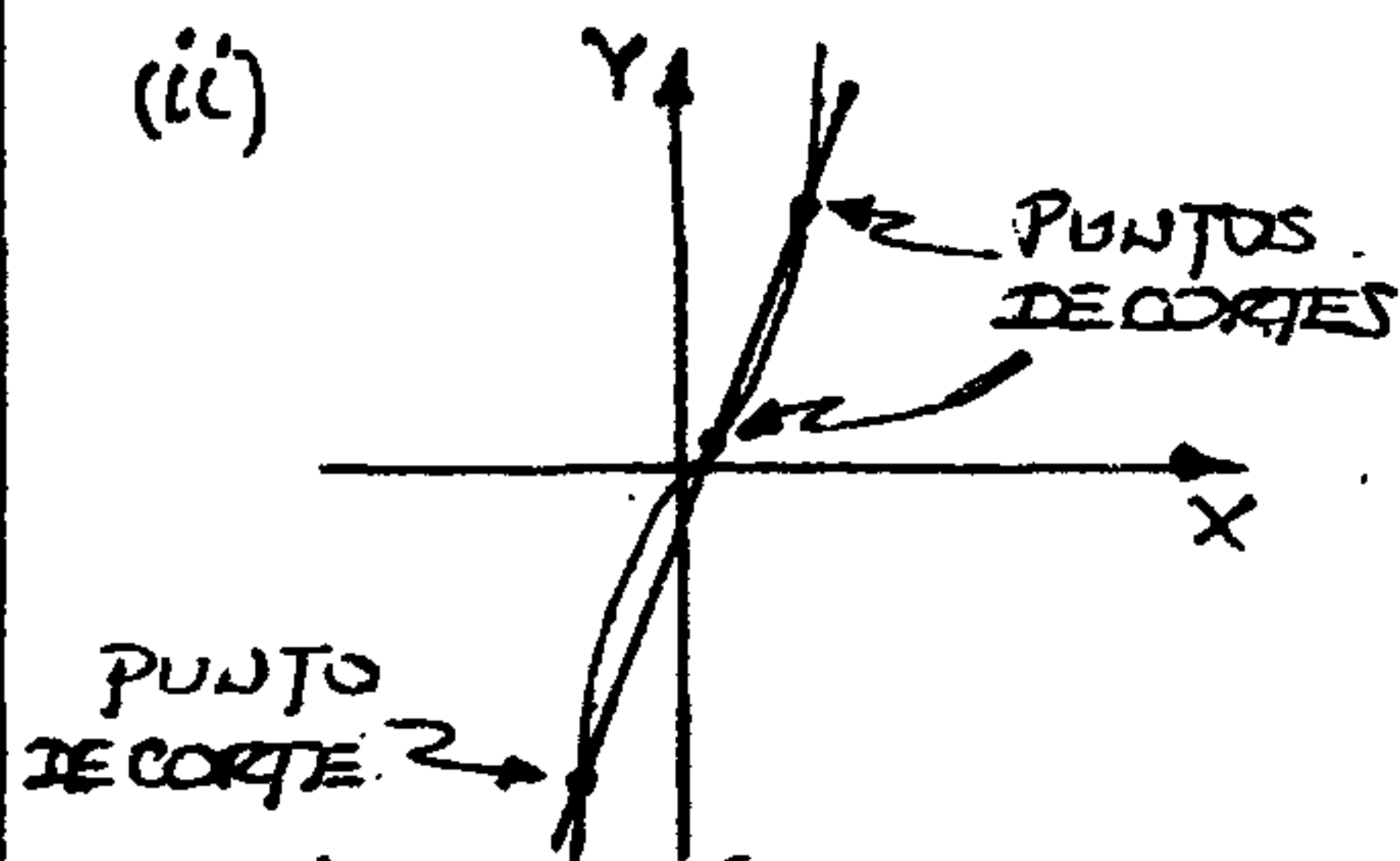
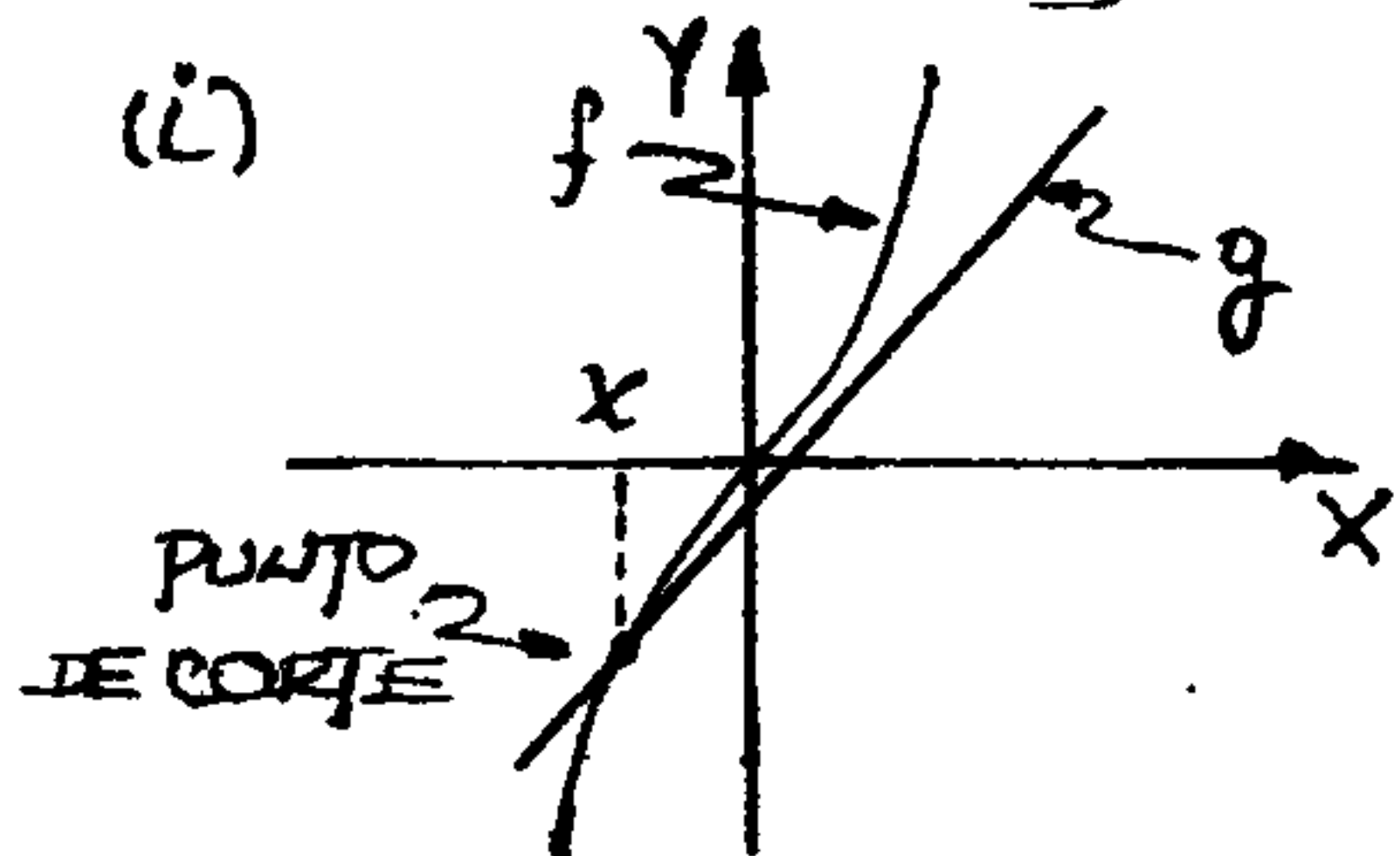
SI $\theta > 0$; GRAFICANDO:



SEGÚN GRÁFICO, TAMBIÉN HABRÍA UNA SOLUCIÓN REAL

CONCLUSIÓN: SI $\Delta \geq 0$, LA ECUACIÓN ADMITE UNA SOLA RAÍZ REAL \Rightarrow (I) ES V

(2°). SI $\Delta < 0$; GRAFICANDO OMBEN 2 POSIBILIDADES:



SEGÚN LOS GRÁFICOS, PODEMOS DECIR QUE: SI $\Delta < 0$, LA ECUACIÓN ADMITE A LO MÁS 3 RAÍCES REALES \Rightarrow (II) ES F ; (III) ES V

\therefore VFV

28 CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

.... DONDE $n \in \mathbb{Z} \wedge 6 \leq n < 9$

OBSERVO, DEL DATO $n = 6; 7; 8$ PERO EL ÚNICO n QUE HACE QUE LA ECUACIÓN SEA RECÍPROCA

ES $n = 6$. LA ECUACIÓN ES:

$$x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + bx + c = 0$$

DE AQUÍ: $c = 1$; $b = 3$; $a = -4$

$$\Rightarrow x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$$

ESTA RECÍPROCA DE GRADO IMPAR ADMITE RAÍZ $x = -1$

POR DIVISORES BINOMIOS:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -1 & 1 & 3 & -4 & -4 & 3 & 1 \\ & \downarrow & -1 & -2 & 6 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & -6 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1) = 0$$

FACTORICEMOS (*) POR ASPA DOBLE ESPECIAL:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 \nearrow \boxed{4x} \nwarrow x^2 \\ x^2 \nearrow \boxed{-2x} \nwarrow x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{S.D.T.: } -6x^2 \\ \text{S.T.: } 2x^2 \end{array}$$

LUEGO, TENDREMOS:

$$(x+1)(x^2 + 4x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2 + 4x + 1)(x-1)^2 = 0$$

$$\neq x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$\neq x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\neq (x-1)^2 = 0 \rightarrow x=1 \text{ (RAÍZ DOBLE)}$$

OBS: # DE RAÍCES REALES: 5

PERO... # DE SOLUCIONES REALES, ES: 4

29 Si $x_1 = i \wedge x_2 = -i$ son raíces de la ecuación

$$px^5 + 2x^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2 = 0$$

DONDE: $a; b; c; d \in \mathbb{Q}$

✦ POR PARIDAD DE RAÍCES

$$x_3 = -i \text{ A } x_4 = -1-i$$

TAMBIÉN SON RAÍCES DE $P(x)$.

LUEGO, ES FACTOR DE $P(x)$:

$$(x-i)(x+i)(x+1-i)(x+1+i)$$

$$(x^2+1) \cdot (x^2+2x+2)$$

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+2 (=d(x))$$

DONDE $P(x)$ ES DIVISIBLE POR $d(x)$

$$\Downarrow 2x^5+2x^4+bx^3+cx^2+dx-2 \Downarrow$$

$$= (x^4+2x^3+3x^2+2x+2) \underbrace{q(x)}_{(mx+n)}$$

DONDE PODEMOS VER QUE:

$$m=2 \wedge n=-1$$

$$\Downarrow 2x^5+2x^4+bx^3+cx^2+dx-2 \Downarrow$$

$$= (x^4+2x^3+3x^2+2x+2)(2x-1)$$

POR SER IDÉNTICOS, DAMOS VALOR ADECUADO A x :

$$\text{PARA } x=1$$

$$2+2+b+c+d-2=(10)(1)$$

$$\therefore 2+b+c+d=10$$

$$\textcircled{30} P(x) = x^7 - 20x^5 - 2x^4 + 64x^3 + 40x^2 - 128$$

$$= 0$$

FACTORICEMOS $P(x)$ POR DIVISORES BINOMIOS:

M.O.S:

| | | | | | | | | |
|----|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| | 1 | 0 | -20 | -2 | 64 | 40 | 0 | -128 |
| 2 | ↓ | 2 | 4 | -32 | -68 | -8 | 64 | 128 |
| | 1 | 2 | -16 | -34 | -4 | 32 | 64 | 0 |
| -2 | ↓ | -2 | 0 | 32 | 4 | 0 | -64 | |
| | 1 | 0 | -16 | -2 | 0 | 32 | 0 | |
| 4 | ↓ | 4 | 16 | 0 | -8 | -32 | | |
| | 1 | 4 | 0 | -2 | -8 | 0 | | |
| -4 | ↓ | -4 | 0 | 0 | 8 | | | |
| | 1 | 0 | 0 | -2 | 0 | | | |

$$\Downarrow P(x) = (x-2)(x+2)(x-4)(x+4)(x^3-2) = 0$$

✦ OBS.: RAÍCES SON:

$$x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 4; x_4 = -4$$

$$✦ \text{ADEMÁS: } x^3 - 2 = 0 \rightarrow x^3 = 2$$

$$✦ \text{DE AQUÍ, RAÍZ REAL ES: } x_5 = \sqrt[3]{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sqrt[3]{2}$$

31) CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

$$x^4(2 + \frac{2\sqrt{2}+2}{x}) + x^2 - (\sqrt{2}+1)x = -1$$

✦ EFECTUANDO:

$$2x^4 + (2\sqrt{2}+2)x^3 + x^2 - (\sqrt{2}+1)x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & \begin{array}{c} \uparrow \\ \boxed{0x} \\ \uparrow \end{array} & -1 \\ x^2 & \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{(\sqrt{2}+1)x} \\ \downarrow \end{array} & 1 \end{array}$$

✦ S.D.T. = x^2
✦ S.T. = x^2
✦ FALTA: $0x^2$

$$(2x^2-1)(x^2+(\sqrt{2}+1)x+1) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \text{SUMA DE} & \text{SUMA DE RAÍCES} \\ \text{RAÍCES: } 0 & \text{ES: } -\sqrt{2}-1 \end{array}$$

$$\therefore \Sigma \text{RAÍCES REALES: } -\sqrt{2}-1$$

$$\textcircled{32} \text{ ECUACIÓN: } x^4 + px^2 + q = 0$$

$$(*) \text{ SI } p=0 \rightarrow x^4 = -q$$

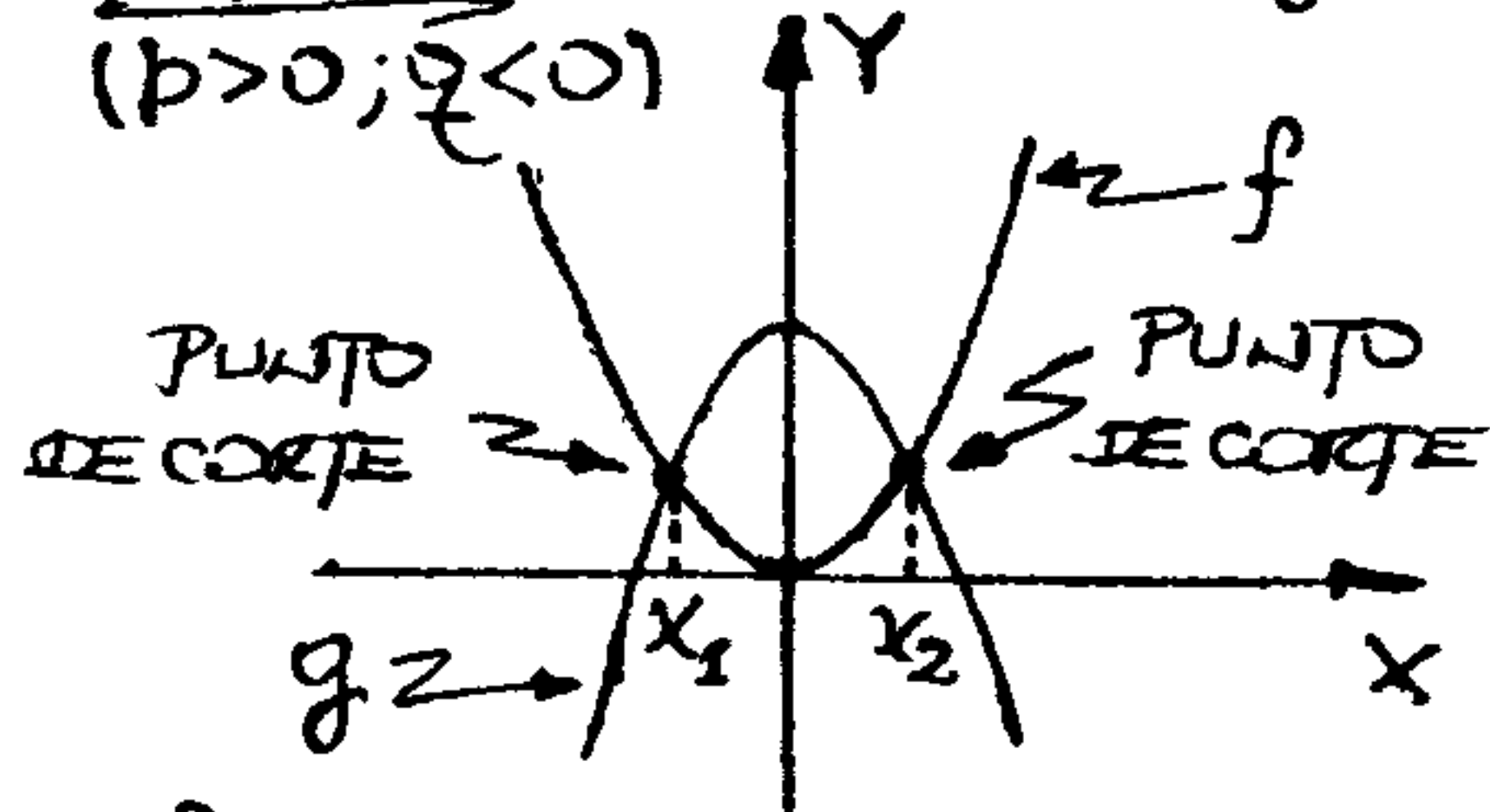
✦ SI $q > 0 \rightarrow$ LA ECUACIÓN POSEE 4 RAÍCES IMAGINARIAS

✦ SI $q < 0 \rightarrow$ LA ECUACIÓN ADMITIRÁ 2 RAÍCES REALES Y 2 RAÍCES IMAGINARIAS. \Downarrow (I) E.F.

(*) DE LA ECUACIÓN: $x^4 = -px^2 - q$

GRAFICANDO:

$(p > 0; q < 0)$



OB: LA ECUACIÓN ADMITIRÁ 2 RAÍCES REALES

⇒ (II) ES V

(*) DE $x^4 + px^2 + q = 0$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$$

OB: SI $p^2 - 4q = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-p}{2}}$

(RAÍCES DOBLES)

DONDE: • SI $p > 0 \rightarrow$ LAS RAÍCES SERÁN IMAGINARIAS

• SI $p \leq 0 \rightarrow$ LAS RAÍCES SERÁN REALES

• SI $p = 0 \rightarrow$ LA RAÍZ SERÁ NULA (RAÍZ CUADRUPLE)

⇒ (III) ES F

(*) SI $p = q + 1 > 2$; $q > 1$ EN LA ECUACIÓN ANTERIOR:

$$x^4 + (q+1)x^2 + q = 0$$

$$(x^2 + q)(x^2 + 1) = 0$$

$$\bullet x^2 + q = 0 \rightarrow x^2 = -q \nrightarrow x \notin \mathbb{R}$$

$$\bullet x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \nrightarrow x \notin \mathbb{R}$$

→ LA ECUACIÓN POSEE 4 RAÍCES IMAGINARIAS

⇒ (IV) ES V

∴ FV FV

(33) SI a, b, c SON RAÍCES DE LA EC. $x^3 - 3x + 1 = 0$

⇒ POR CARDANO-VIETE:

$$\bullet a + b + c = 0$$

$$\bullet ab + bc + ca = -3$$

$$\bullet abc = -1$$

AHORA, POR PRODUCTOS NOTABLES, SE SABE QUE (VER RESOLUCIÓN 9):

$$\text{SI } a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$$

$$\text{ó } a^4 + b^4 + c^4 = 2(-3)^2 = 18$$

REEMPLAZANDO EN LA ECUACIÓN:

$$x^2 + 11abcx + (a^4 + b^4 + c^4) = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 11(-1)x + (18) = 0$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$(x - 9)(x - 2) = 0$$

OB: $x = 9 \vee x = 2$

∴ MEJOR RAÍZ: 2

(34) SI m, n, p SON RAÍCES DE LA ECUACIÓN $x^3 + mx^2 + nx - p = 0$ / $m \neq 0$

POR CARDANO-VIETE, SE TIENE:

$$\bullet m + n + p = m \rightarrow n + p = 0 \dots (1)$$

$$\bullet mn + p = p \rightarrow mn = 1 \dots (2)$$

SI $x = m$ ES RAÍZ DE LA ECUACIÓN, ENTONCES, ESTE VALOR SATISFACE A LA ECUACIÓN.

$$\Rightarrow m^3 + m^2 + nm - p = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } mn = p \rightarrow p = 1$$

$$\text{EN (1): } n = -1 ; \text{ EN (2): } m = -1$$

$$\therefore m + n + p = -1$$

35) DE $x^n - 2x^2 - 3x + 1 = 0$; $n \rightarrow$ PAR

Por CARDANO-VIETE:

• \sum DE RAÍCES $= 0 \rightarrow A$

• \sum DE PRODUCTOS BINARIOS DE SUS RAÍCES $= 0 \rightarrow B$

• \sum DE PRODUCTOS TERNARIOS DE SUS RAÍCES $= 0 \rightarrow C$

\vdots

\vdots

• \sum DE PRODUCTOS DE RAÍCES TOMADOS DE $(n-2)$ EN $(n-2) = -2 \rightarrow M$

• \sum DE PRODUCTOS DE RAÍCES TOMADOS DE $(n-1)$ EN $(n-1) = 3 \rightarrow N$

• PRODUCTO DE RAÍCES $= 1 \rightarrow P$

EXTENDIENDO LA PRODUCTORIA PEDIDA:

n

$$\prod_{i=1}^n (2 - \alpha_i) = (2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2) \dots (2 - \alpha_n)$$

EFFECTUANDO EN EL 2º MIEMBRO:

$$= 2^n - A \cdot 2^{n-1} + B \cdot 2^{n-2} - C \cdot 2^{n-3} + \dots + M \cdot 2^2 - N \cdot 2 + P$$

REEMPLAZANDO VALORES NOS QUE-

DA:

$$\prod_{i=1}^n (2 - \alpha_i) = 2^n - 0 + 0 - 0 + \dots - 8 - 6 + 1$$

DE AQUÍ: $\prod_{i=1}^n (2 - \alpha_i) - 2^n = -13$

36) LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR:

$$ix^3 + 3x^2 - 3ix - 5 + 3 = 0$$

$$(-ix - 1)^3 + 3 = 0$$

$$\rightarrow -(ix + 1)^3 = -3$$

$$\rightarrow (ix + 1)^3 = 3$$

DE AQUÍ:

$$ix + 1 = \sqrt[3]{3}(1)$$

$$\sqrt[3]{3}(w)$$

$$\sqrt[3]{3}(w^2)$$

DOnde 1, w y w^2 son RAÍCES CÚBICAS DE 1.

DE AHÍ, YA PODEMOS VER QUE LA ECUACIÓN ADMITE 3 RAÍCES IMAGINARIAS.

⦿ (I) ES F; (II) ES V; (III) ES F

$$\therefore \underline{FVF}$$

37) SEAN LAS RAÍCES EN P.G. DE LA ECUACIÓN $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$; $c \neq 0$

$$x_1 = \frac{m}{q}; x_2 = m; x_3 = mq$$

DE AQUÍ, POR CARDANO-VIETE:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m}{q} + m + mq = -a$$

$$\rightarrow m\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = -a \dots (1)$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{m^2}{q} + m^2 + m^2 q = b$$

$$\rightarrow m^2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = b \dots (2)$$

$$x_1 x_2 x_3 = m^3 = -c \dots (3)$$

$$(2) \div (1): m = \frac{b}{-a} \rightarrow m^3 = -\frac{b^3}{a^3} \dots (4)$$

$$(4) \div (3): -\frac{b^3}{a^3} = -c \therefore \underline{b^3 = ca^3}$$

38) Sean a, b, c, d raíces de la ec.

$$x^4 + 3x^3 + \lambda x^2 + 6x + 4 = 0$$

Por condición:

$$ab = 2 \quad \wedge \quad c + d = 1$$

(1) (2)

Por Cardano-Viete:

$$a + b + c + d = -3 \rightarrow a + b = -4$$

1

$$abcd = 4 \rightarrow cd = 2$$

2

Obj: Conociendo $a + b = -4$ y $ab = 2$ la ecuación que admite por raíces a a y b es:

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Similar: la ecuación que tiene por raíces a c y d es:

$$x^2 - x + 2 = 0$$

Luego, podemos afirmar:

$$x^4 + 3x^3 + \lambda x^2 + 6x + 4 = (x^2 + 4x + 2)(x^2 - x + 2)$$

Por ser identidad, doy valor a x :

$$x = 1 \rightarrow 14 + \lambda = (7)(2) \therefore \lambda = 0$$

39) CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

... $x^3 - 3x + n = 0$, posee SÓLO raíces enteras; ojo $n \neq 0$!

Supongamos que la raíz entera es $x = m$; dividamos por Ruffini:

| | | | | |
|---------|---------------------------------------|-----|-------------|------------|
| $x = m$ | $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$ | 0 | -3 | n |
| | 1 | m | m^2 | $m^2 - 3m$ |
| | 1 | m | $(m^2 - 3)$ | 0 |

$$\hookrightarrow (x - m)[x^2 + mx + (m^2 - 3)] = 0$$

(*)

Para que (*) tenga raíces enteras, se debe cumplir:

$\Delta \rightarrow$ debe ser cuadrado perfecto (≥ 0)

$$\text{Obj: } \Delta = m^2 - 4(m^2 - 3)$$

$$\Delta = 12 - 3m^2 \geq 0 \rightarrow m^2 \leq 4$$

$$\text{de aquí: } -2 \leq m \leq 2$$

$$m = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\text{pero: } n = 3m - m^3$$

Luego, dando valores a m , se tiene:

$$n = 2; \quad n = -2; \quad n = 0$$

✓ ✓ ✗

$\therefore n$ toma 2 valores

40) DE LA ECUACIÓN DADA:

$$x^{2003} = -(x^2 + x + 1)$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son raíces, entonces:

$$\text{Obj: } \alpha_1^{2003} = -(\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1)$$

$$\alpha_2^{2003} = -(\alpha_2^2 + \alpha_2 + 1)$$

⋮

$$\alpha_{2003}^{2003} = -(\alpha_{2003}^2 + \alpha_{2003} + 1)$$

Sumando, se tiene lo pedido (S):

$$S = -[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{2003}^2) +$$

$$+(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2003}) + (1 + 1 + \dots + 1)]$$

2003 TÉRMs.

DE LA ECUACIÓN ORIGINAL POR CARDANO-VIETE:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2003} = 0$$

ELEVANDO AL CUADRADO Y DESPEJANDO:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{2003}^2 = -2(\alpha_1 \alpha_2 + \dots)$$

VALE 0

$$\hookrightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{2003}^2 = 0$$

$$\text{En } S: S = -[0 + 0 + 2003]$$

$$S = -2003$$

MATRICES Y DETERMINANTES

X

Algebra

CAPÍTULO

01 $A = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

DE $2AC = B^4$

$\rightarrow |2AC| = |B^4| \rightarrow |2A||C| = |B|^4$

$\rightarrow 2^2 |A||C| = |B|^4 \dots (I)$

VEAMOS QUE:

$|A| = 3; |B| = 3 \wedge |C| = |C^T|$

EN (I): $4 \times 3 \times |C^T| = 3^4$

DE AQUÍ: $|C^T| = \frac{27}{4}$

02 DESARROLLANDO POR REGLA DE LA ESTRELLA:

$x^3 + x^2 + x - 3x = -x^2 + 3x^2 - x^4 - x^3$

$\rightarrow x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

$\rightarrow x^3(x+2) - x(x+2) = 0$

$\rightarrow x(x+2)(x^2-1) = 0$

$\rightarrow x(x+2)(x+1)(x-1) = 0$

* $x_1 = 0; x_2 = -2; x_3 = -1; x_4 = 1$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$

03 $A = \begin{bmatrix} i & 1 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$

Luego:

* $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & i-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

* $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -i & -i & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

* $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

OSEA QUE: $A^4 = I \Rightarrow A^{16} = I^4$

$\Rightarrow A^{16} = I$

$\Rightarrow A^{16} + 2I = 3I_3$

DE AQUÍ:

$|A^{16} + 2I| = |3I_3|$

$= 3^3 |I_3|$
(1)

$\therefore |A^{16} + 2I| = 27$

04 OBS: A ES UNA MATRIZ CUADRA-DA DE ORDEN 15.

DE $A + A^t = 0 \rightarrow A = -A^t \dots (I)$

¡A ES ANTISIMÉTRICA!

OSEA QUE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL SON NULOS

$\Rightarrow \text{traz}(A) = 0$

DE (I): $|A| = |-A^t|$

$\rightarrow |A| = (-1)^{15} |A^t|$

$\rightarrow |A| = -|A| \rightarrow |A| = 0$

$\therefore |A| + \text{traz}(A) = 0$

05) Sea

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 22 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 16 & 0 \end{vmatrix}$$

* $f_1 - 2f_3$; $f_2 - 3f_3$; $f_4 - 4f_3$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 13 \\ \textcircled{1} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 20 & -12 \end{vmatrix}$$

$$A = (1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 13 \\ 2 & 20 & -12 \end{vmatrix}$$

* $C_2 + C_3$ y LUEGO EXTRAEMOS 4
A C_2 ; ASÍ:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 16 & 13 \\ 2 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 13 \\ 2 & 2 & -12 \end{vmatrix}$$

(=)

$\therefore A = 0$

06) RECUERDE

DETERMINANTE DE VANDER-
MONDE (CASO PARTICULAR)

Si

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$\Delta = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

• EN GENERAL, PARA UNA MATRIZ
DE ORDEN n (CON CARACTERÍSTI-
CA SIMILAR), SU DETERMINANTE
VIEJE DADO POR EL PRODUCTO
DE LAS DIFERENCIAS DE LOS ELE-
MENTOS DE LA 2ª FILA TOMADOS
DE 2 EN 2, COMO INDICA LA FLECHA.

* EN EL PROBLEMA DADO:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3+1 & b^3+1 & c^3+1 & d^3+1 \end{vmatrix}$$

SEGÚN PROPIEDAD, ÉSTE SE PUEDE
DESCOMPONER COMO LA ADICIÓN DE
DOS DETERMINANTES; ASÍ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

DETERMINANTE DE TIENE 2 FILAS
VANDERMONDE IGUALES.
(Δ) (VALE 0)

DE AQUÍ, POR EL RECUERDE:

$$\Delta = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

07) CONOCIDO M (DADO), SE TIENE:

$$M \cdot M^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot M^t = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ 2 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\diamond \det(M \cdot M^t) = \begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 281$$

ADemás:

$$M^t \cdot M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\det(M^t \cdot M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

* $C_1 + C_2$:

$$\det(M^t \cdot M) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 16 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

(=)

$$\therefore \det(M^t \cdot M) = 0$$

$$\therefore \det(M \cdot M^t) + \det(M^t \cdot M) = 281$$

❖ TISFOCE LA IGUALDAD ENTRE DICHA DETERMINANTES.

❖ obs: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

❖ DE AQUÍ: $\det(AA^t) = 2956$ y $\det(A^tA) = 0$ (\neq)

❖ (**)(III) ES V

❖ SE VERIFICA NO SÓLO PARA UNA MATRIZ A DE ORDEN 10×7 , SINO PARA TODA MATRIZ A PERFECTAMENTE DEFINIDA.

❖ (****)(IV) ES V

❖ SE VERIFICA PARA TODA MATRIZ A PERO QUE NO SEA MATRIZ CUADRADA.

❖ VERIFIQUE UD. EN:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore FFVV$

08 (*) SI $A = [a_{ij}]_{8 \times 8}$

$$\diamond \det(5A) = 5^8 \cdot \det(A)$$

\Rightarrow (I) ES F

(**)(II) ES F.

TAL VEE EXISTAN ALGUNAS MATRICES, TAL QUE $\det(A \cdot A^t) = \det(A^t \cdot A)$

DONDE $A = (a_{ij})_{5 \times 3}$ (POR EJ. $A = 0$)

PERO NO CUALQUIER MATRIZ SA-

09 EN EL DETERMINANTE DE ORDEN

(n+1) SUMAMOS A LA COLUMNA 1 TODAS LAS DEMÁS COLUMNAS.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -n & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & -n & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

↑ TODOS SON CEROS

⑩ Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

* $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -7 & 33 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$

* $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 19 & -88 \\ 8 & -37 \end{bmatrix}$

* $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} -50 & 231 \\ -21 & 97 \end{bmatrix}$

JUEGO: $A^4 + I = \begin{bmatrix} -49 & 231 \\ -21 & 98 \end{bmatrix}$

⇒ $\det(A^4 + I) = \begin{vmatrix} -49 & 231 \\ -21 & 98 \end{vmatrix}$
 $= -4802 + 4851 = 49$

⑪ Si INTERCAMBIAMOS C_2 POR C_4 EN EL 2º DETERMINANTE, ÉSTE CAMBIARÁ DE SIGNO. QUEDANDO ASÍ:

$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 4 & 1 \\ -11 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} 13 & 3 & 5 & 1 \\ -11 & 4 & 11 & 1 \\ 2 & 5 & 15 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 9 & 1 \\ -11 & 4 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & 15 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

SON PROPORCIONALES

⑫ POR SUMA DE DETERMINAN-

TES, SE PUEDE ESCRIBIR:

$\begin{vmatrix} 3+6+9+12+\dots+30 & -1 & 55 \\ 0+1+2+3+\dots+9 & 2 & 15 \\ 1+2+4+8+\dots+512 & 1 & 341 \end{vmatrix}$

CALCULEMOS POR SEPARADO:

$3+6+9+12+\dots+30 \rightarrow$
 $= 3(1+2+3+4+\dots+10)$
 $= 3\left[\frac{10 \times 11}{2}\right] = 3(55)$

$0+1+2+3+\dots+9 = \frac{9 \times 10}{2} = 3(15)$

$1+2+4+8+\dots+512 \rightarrow$
 $= \frac{2^9 + 2^8 + \dots + 2^3 + 2^2 + 2^1}{\text{COEFICIENTE NOTABLE}}$
 $= \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023 = 3(341)$

EN EL DETERMINANTE:

$\begin{vmatrix} 3(55) & -1 & 55 \\ 3(15) & 2 & 15 \\ 3(341) & 1 & 341 \end{vmatrix} = 0$

SON PROPORCIONALES

⑬ A LA FILA 1 LE SUMAMOS $f_4 \times \left(-\frac{2}{x}\right) + f_3 \times \left(-\frac{2}{x}\right) + f_2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)$

SE OBTIENE ESTO:

$\begin{vmatrix} k - \frac{2}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & x & 0 \\ 3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

$$\rightarrow \left(x - \frac{14}{x}\right)x^3 = 0 \rightarrow (x^2 - 14)x^2 = 0$$

DE AQUÍ: $x^2 - 14 = 0$

SI x_1 ES UNA SOLUCIÓN,

$$\Rightarrow x_1^2 - 14 = 0 \therefore x_1^2 = 14$$

14 DADO UN POLINOMIO $P(x)$, SU TÉRMINO INDEPENDIENTE VIENE DADO POR $P(0)$.

$$\Rightarrow T.I.[P] = P(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$T.I.[P] = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0$$

$$\therefore T.I.[P] = 2$$

15 OBSERVACIÓN

DEBE DECIR:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{FALTA}$$

• DEL DETERMINANTE.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} (=)$$

LUEGO, SE TENDRÁ:

$$5 \sqrt{2(0)} = 0$$

16 NOS PIDEN:

$$\det((5A^t)(2A)) = \det(10(A^t A)) \dots (I)$$

SEA $\sqrt{2}=a$; $\sqrt{3}=b$; $\sqrt{5}=c$; $\sqrt{7}=d$

SI $A = [\sqrt{2} \ \sqrt{3} \ \sqrt{5} \ \sqrt{7}]$

$$\Rightarrow A = [a \ b \ c \ d]$$

LUEGO:

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_{4 \times 1} \cdot [a \ b \ c \ d]_{1 \times 4}$$

$$\Rightarrow A^t \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

LUEGO:

$$\det(A^t \cdot A) = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A^t \cdot A) = abcd \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{vmatrix} (=)$$

VALE 0

$$\therefore \det(A^t \cdot A) = 0$$

LUEGO, EN (I):

$$\det((5A^t)(2A)) = 10^4 \cdot \det(A^t A)$$

$$\therefore \det((5A^t)(2A)) = 0$$

$$(17) \quad |A| = \begin{vmatrix} x+y & x & x & \dots & x \\ x & x+y & x & \dots & x \\ x & x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+y \end{vmatrix}$$

SUMAMOS A C_1 TODAS LAS DEMÁS COLUMNAS, LOS ELEMENTOS DE C_1 SERÁN $(n \times (x+y))$. FACTORIZAMOS ESTE ELEMENTO DE C_1 , Y NOS QUEDARÁ ASÍ:

$$|A| = (n \times (x+y)) \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ 1 & x+y & x & \dots & x \\ 1 & x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & x+y \end{vmatrix}$$

MULTIPLICAMOS POR x A C_1 Y SE LO RESTAMOS A TODAS LAS DEMÁS COLUMNAS; QUEDARÁ ASÍ:

$$|A| = (n \times (x+y)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & y \end{vmatrix}$$

$$|A| = (n \times (x+y)) (\underbrace{y \cdot y \cdot y \dots y}_{(n-1) \text{ VECES}})$$

$$\therefore |A| = (n \times (x+y)) \cdot y^{n-1}$$

$$(18) \text{ Si } A = \begin{pmatrix} 0 & n \\ m & p \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & m \\ n & p \end{pmatrix}.$$

LUEGO:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & m+n \\ m+n & 2p \end{pmatrix}$$

SEA LO PEDIDO; SEA:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \det \left[\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}} (A + A^t) \right] \\ &= \det \left[\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}} \begin{pmatrix} 0 & m+n \\ m+n & 2p \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}^2} \det \begin{pmatrix} 0 & m+n \\ m+n & 2p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2+n^2} \times -(m^2+2mn+n^2) \end{aligned}$$

$$\text{DEL DATO: } A^5 = \sqrt{2} A^4$$

$$\rightarrow A^5 - \sqrt{2} A^4 = 0 \rightarrow A^4 (A - \sqrt{2} I) = 0$$

TOMAMOS DETERMINANTES:

$$\Rightarrow (\det A)^4 \cdot \det (A - \sqrt{2} I) = 0$$

DE AQUÍ, 2 POSIBILIDADES:

$$\bullet \text{ Si } \det A = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & n \\ m & p \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{DONDE: } mn = 0$$

$$\text{EN } \mathcal{E}: \mathcal{E} = \frac{1}{m^2+n^2} \times -(m^2+n^2)$$

$$\therefore \mathcal{E} = -1$$

• PARA LA OTRA POSIBILIDAD:

$$\text{Si } \det (A - \sqrt{2} I) = 0$$

¡NO APORECE RESPUESTA!

(19) OBSERVACIÓN

DEBE DECIR:

... TALES QUE $AB = 0$ DONDE...

SEA LO PEDIDO \mathcal{E} ,

$$\hookrightarrow \mathcal{E} = \det(A + A^2) + \det(B + B^2)$$

$$E = \det(A(I+A)) + \det(B(I+B))$$

$$= \det A \cdot \det(I+A) + \det B \cdot \det(I+B)$$

$$\text{POR DADO: } AB=0 / A \neq 0; B \neq 0$$

TOMAMOS DETERMINANTES:

$$\det(AB) = \det 0$$

$$\det A \cdot \det B = 0$$

DE AQUÍ, POSIBILIDADES:

$$(i) \text{ SI } \det A = 0$$

$$(ii) \text{ SI } \det B = 0$$

$$(iii) \text{ SI } \det A = 0 \wedge \det B = 0$$

ASUMIENDO EL CASO (iii):

$$\Rightarrow E = 0 \cdot \det(I+A) + 0 \cdot \det(I+B)$$

$$\therefore E = 0$$

$$(20) A = (a_{ij})_{n \times n} / a_{23} = 1$$

OBJ: $A \neq 0$ (MATRIZ NULA)

$A \neq I; -I$ ($I \rightarrow$ MATRIZ IDENTIDAD)

$$\text{DE } A^2 + A = 0 \rightarrow A(A+I) = 0$$

TOMANDO TRANSUESTA:

$$[A(A+I)]^t = 0^t$$

$$\rightarrow (A+I)^t \cdot A^t = 0$$

$$\rightarrow (A^t + I) \cdot A^t = 0$$

DE AQUÍ, TOMAMOS DETERMINANTES:

$$\det(A^t + I) \cdot \det A^t = 0$$

$$\det(A^t + I) \cdot \det A = 0$$

ASUMIENDO LA POSIBILIDAD QUE:

$$\det(A^t + I) = 0 \wedge \det(A) = 0 (\alpha)$$

$$\Rightarrow |A| + |A^t + I| = 0$$

NOTA: EXISTE UNA MATRIZ A / VERIFICA (α).

(21) PARA QUE LA MATRIZ DADA NO SEA INVERSIBLE (NO TENGA INVERSA), SU DETERMINANTE DEBE VALER 0.

$$\text{ES DECIR: } \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2x & x+2 & x \\ x+1 & 3 & -x^2 \end{vmatrix} = 0$$

"FACTORIZO" $x \in \mathbb{C}_3$:

$$x \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2x & x+2 & 1 \\ x+1 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0$$

DESARROLLANDO, SE TIENE:

$$x(-x^3 - 2x^2 + 2x + 2 - 3x + 4x^2) = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 0$$

$$x[x^2(x-2) + (x-2)] = 0$$

$$x(x-2)(x^2+1) = 0$$

DE AQUÍ:

$$* x = 0$$

$$* x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$* x^2 + 1 = 0 \rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

$$\therefore C.S. = \{0; 2\}$$

(22) RECUERDE

$$\text{SI } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad - bc \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$$

EN EL PROBLEMA:

$$\text{SI } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \rightarrow \text{VALE } I$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(23) \text{ Si } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Por el recuerdo anterior (RESOL. 22):

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{0+18} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{traz}(A+B)^{-1} = \frac{1}{18}(0+7) = \frac{7}{18}$$

(24) RECUERDE

Si A y B son matrices invertibles,

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

En el problema:

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$$

(25) La expresión dada tiene la forma $A \cdot X \cdot B = C$

\Rightarrow despejando X, se tendrá:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

En el problema:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I \rightarrow \text{MATRIZ IDENTIDAD}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Por el recuerdo anterior (RESOL. 24):

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{-16+6}$$

$$\therefore X = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(26) DADO: $A^2 = A / A = (2I)_{3 \times 3}$

ASUMIENDO QUE A POSEE INVERSA, ENTONCES:

$$\underbrace{A^2 \cdot A^{-1}}_A = \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I$$

$$A = I \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{MATRIZ} \\ \text{IDENTIDAD} \end{array} \right.$$

(ESTA ES UNA POSIBILIDAD)

Con esto, por propiedades:

$$\neq A^{-1} = I^{-1} \rightarrow A^{-1} = I$$

$$\neq A^t = I^t \rightarrow A^t = I$$

Luego:

$$\text{traz}(A) + \det(A^{-1} + A^t)$$

$$= \text{traz}(I) + \det(2I)$$

$$= 3 + 2^3 \cdot \underbrace{\det(I)}_1 = 11$$

RECUERDE

DADA UNA MATRIZ CUADRADA A , SE LLAMA TRAZA DE DICHA MATRIZ A LA SUMA DE LOS ELEMENTOS QUE TENIENDO EN LA DIAGONAL PRINCIPAL. SE DENOTA POR $\text{traz}(A)$. O SEA:

$$\text{Siendo } A = (a_{ij})_{n \times n} \\ \Rightarrow \text{traz}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

CON LAS PROPIEDADES:

* SIENDO A y B MATRICES CUADRADAS DEL MISMO ORDEN y λ UN ESCALAR, SE VERIFICA:

$$\text{traz}(A \pm B) = \text{traz}(A) \pm \text{traz}(B)$$

$$\text{traz}(\lambda A) = \lambda \text{traz}(A)$$

$$\text{traz}(AB) = \text{traz}(BA)$$

27)
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 15 \\ -1 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

NOSE PIDE:

$$\text{traz}(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \text{traz}[(PA)P^{-1}]$$

APLICANDO LA PROPIEDAD 3

$$\text{traz}(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \text{traz}(P^{-1} \cdot P \cdot A)$$

$$= \text{traz}(I \cdot A)$$

$$= \text{traz}(A)$$

$$\text{O SEA: } \text{traz}(A) = 5 + 10 + 3 = 18$$

$$\therefore \text{traz}(P \cdot A \cdot P^{-1}) = 18$$

28) Si LA MATRIZ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix} \text{ ES SIMÉTRICA}$$

$$\Rightarrow a=0; b=0; c=0$$

O SEA QUE:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

HALLEMOS A^{-1} POR MATRIZ AMPLIADA:

$$[A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} f_1 \times \frac{1}{2} \\ f_3 \times \frac{1}{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right) \begin{array}{l} I \\ A^{-1} \end{array}$$

LUEGO:

$$\begin{aligned} \text{traz}(A + A^{-1}) &= \text{traz}(A) + \text{traz}(A^{-1}) \\ &= (2 + 1 + 3) + \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Sumando:

$$\text{traz}(A + A^{-1}) = \frac{47}{6}$$

29) USANDO LOS DATOS:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} / |A| = 2$$

$$B = (b_{ij})_{4 \times 4} / |B| = -2$$

CALCULEMOS POR PARTES:

$$\begin{aligned} \det(2A^t) &= |2A^t| = 2^3 |A^t| \\ &= 8 |A| = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(3A^{-1}) &= |3A^{-1}| = 3^3 |A^{-1}| \\ &= 27 |A|^{-1} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(-B) &= |-B| = (-1)^4 |B| \\ &= |B| = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(2B) &= |2B| = 2^4 |B| \\ &= 16(-2) = -32 \end{aligned}$$

Lo pedido es:

$$\begin{vmatrix} 16 & -2 \\ \frac{27}{2} & -32 \end{vmatrix} = -512 + 27 = -485$$

(30) Conocido:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \wedge I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow XI - A = \begin{bmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -3 & x-1 & -2 \\ -2 & 1 & x+2 \end{bmatrix}$$

Por condición:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -3 & x-1 & -2 \\ -2 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando respecto a la f_1 :

$$(x-1) \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x-1)x(x+2) = 0$$

$$\text{Obs: } x=1; x=0; x=-2$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{-1; 0; 1\}$$

(31) Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Luego: $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Además: $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 106 & 57 \\ 38 & 11 \end{bmatrix}$

Vemos que:

$$A^3 + A + I = \begin{bmatrix} 111 & 60 \\ 40 & 11 \end{bmatrix}$$

En la condición:

$$|XI - (A^3 + A + I)| = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-111 & -60 \\ -40 & x-11 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-111)(x-11) - 2400 = 0$$

De aquí: $x^2 - 122x - 1179 = 0$

$$\begin{vmatrix} x & 9 \\ x & -131 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+9)(x-131) = 0$$

$$\Rightarrow x = -9 \vee x = 131$$

Mayor valor

(32) RECUERDE

Dada una matriz cuadrada A , de orden n , a la matriz $XI_n - A$ se le llama matriz característica, donde Δ su determinante es decir, al $\det(XI_n - A)$ que es un polinomio en x , se le llama polinomio característico de A . Cumpliendo que toda matriz es un cero de su polinomio característico.

En el problema:

$$|XI - A| = x^2 - 6x^2 + 3x + 2,$$

POL. CARACTERÍSTICO DE A

y como toda matriz es un cero de su polinomio caracte-

RÍSTICO,

$$\hookrightarrow A^3 - 6A^2 + 3A + 2I = 0$$

DE AQUÍ, LA MATRIZ A QUE LA VERIFICA ES $A = I_3 \Rightarrow A^{-1} = I_3$

$$\text{LUEGO: } P(\lambda) = |\lambda I_3 - I_3| = |(\lambda - 1)I_3|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\hookrightarrow P(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

\therefore TÉRMINO LINEAL: 3λ

23) DATO: $A = (a_{ij})_{n \times n}; n \in \mathbb{Z}^+$

DEFINICIÓN: SIENDO A UNA MATRIZ CUADRADA, DONDE:

$$A^p = 0; p \in \mathbb{Z}^+$$

\Rightarrow A ES UNA MATRIZ NILPOTENTE

$$\hookrightarrow (I) \in V$$

$$\dots \text{ Si } A^3 = A$$

DONDE A TIENE INVERSA, O SEA

$$A^{-1} \text{ EXISTE } \hookrightarrow A^3 \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1}$$

$$\rightarrow A^2 = I$$

OTO: ¡SÓLO SI A TIENE INVERSA!

$$\hookrightarrow (II) \in F$$

... Si A ES IDEMPOTENTE $\hookrightarrow A^2 = A$
(DEFINICIÓN)

COMO A ES INVERSIBLE (DATO)

$$\Rightarrow \underline{A^2 \cdot A^{-1}} = \underline{A \cdot A^{-1}}$$

$$A = I \text{ (MATRIZ IDENTIDAD)}$$

Y COMO A ES DE ORDEN n, ENTON

$$\text{CES: } \text{Traz}(A) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ VECES}} = n$$

$$\therefore \underline{V F V}$$

$$\hookrightarrow (III) \in V$$

34) DATO: $AB = BA$

REEMPLAZANDO MATRICES:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2+3b \\ 10 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2a & 15 \\ -2+2b & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{OBS: } \begin{cases} 10 = -2 + 2b \rightarrow b = 6 \\ 2a = -6 \rightarrow a = -3 \end{cases}$$

$$\therefore 2a = -6 \rightarrow a = -3$$

(ESTOS VALORES VERIFICAN AL IGUALAR EN LA 1ª FILA)

$$\therefore 2b = -18$$

$$35) A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & x-1 \end{bmatrix}$$

$$\text{CONDICIÓN: } |A| = \text{traz}(A) - 1$$

$$x(x-1) - 2 = (x + x-1) - 1$$

$$\rightarrow x^2 - x - 2 = 2x - 1$$

$$\rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } x = 0 \vee x = 3$$

(POR DATO)

$$\hookrightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \Sigma \text{ DE ELEM. DE } A^2: 32$$

36) DATO:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

LUEGO:

$$\nabla A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} = K$$

$$\nabla A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

CON ESTO, YA PODEMOS DECIR:

$$\nabla A^4 = K$$

$$\nabla A^5 = A$$

$$\nabla A^6 = K$$

$$\nabla A^7 = A$$

$$\vdots$$

$$\nabla A^{20} = K$$

$$\therefore \sum \text{DE ELEM. DE LA } f_2 \text{ DE } A^{20} : 9 + 10 + 9 = \underline{28}$$

37) RECUERDE

MEJOR COMPLEMENTARIO DE UN ELEMENTO DE UNA MATRIZ

SEA LA MATRIZ $A = (a_{ij})_{n \times n}$, SE DENOMINA MEJOR COMPLEMENTARIO DE a_{ij} DENOTADO POR $|M_{ij}|$, AL DETERMINANTE DE LA MATRIZ DE ORDEN $(n-1)$ QUE SE OBTIENE LUEGO DE SUPRIMIR LA FILA Y LA COLUMNA A LA CUAL PERTENECE DICHO ELEMENTO a_{ij} .
POR EJEMPLO:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

► PROB. 37: MAL PROPUESTO.

38)

DATO:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1 \times 2}{2}}$$

LUEGO:

$$\nabla A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2 \times 3}{2}}$$

$$\nabla A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{3 \times 4}{2}}$$

$$\nabla A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{4 \times 5}{2}}$$

CON ESTO, PODEMOS DECIR, SEGÚN LEY DE FORMACIÓN:

$$\nabla A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ \bullet & -n & 1 \end{bmatrix} = B$$

$$\xrightarrow{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\Rightarrow b_{21} + b_{31} = -n + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{-2n + n^2 + n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

39)

DATO:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

LUEGO:

$$\nabla A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

OSEA QUE: $A^3 = I$

$\Rightarrow (A^3)^6 = I^6 \Rightarrow A^{18} = I$

$\Rightarrow A^{18} \cdot A = I \cdot A \Rightarrow A^{19} = A$

$\Rightarrow A^{20} = A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

FINAMENTE:

$A^{20} + I = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore \sum_{\text{DE } (A^{20} + I)}^{\text{DE ELEM.}} : \underline{13}$

40 DADO: $A = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 \\ 1+2^2 & 1-2 \end{bmatrix}$

LUEGO:

$\star A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2a & -2 \\ 2(2+1) & -2a \end{bmatrix}$
 $= 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2+1 & -2 \end{bmatrix}$

$\star A^3 = A^2 \cdot A = 2 \begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 1+2 & -1-2 \end{bmatrix}$

$\star A^4 = A^3 \cdot A = 2 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
 $= 2(-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow A^4 = -4I$

LUEGO:

$(A^4)^2 = (-4I)^2$

$\rightarrow A^8 = (-4)^2 I^2 = 16I$

$\therefore A^8 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

41 Si $P(x) = x^{19} + 2x - 1$

$\rightarrow P(A) = A^{19} + 2A - I$

PERO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

LUEGO:

$\star A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\star A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\star A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

\vdots

$\star A^{19} = A^{18} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

EN $P(A)$:

$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim P(A) = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{traz}(P(A)) = 2 + 2 = \underline{4}$

42 TRANSFORMANDO LO PEDIDO, ASÍ:

$\det(P^{-1}AP + 2I) = \det(P^{-1}AP + 2P^{-1}P)$

$= \det[P^{-1}(A + 2I)P]$

$= \underbrace{(\det P)^{-1} \cdot \det(A + 2I) \cdot \det P}_{\text{VALE 1}}$

$= \det(A + 2I)$

$= \begin{vmatrix} 1-2 & -6 \\ -3 & 3+9 \\ 2 & 0-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -3 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

DESARROLLANDO:

$$\det(P^{-1}AP + 2I) = -15 - 36 + 60 + 6$$

$$= \underline{15}$$

$$(43) \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta + \beta & \beta + \alpha & \theta + \alpha \end{bmatrix}$$

EFECTUAMOS

$$\begin{bmatrix} x\theta & y\beta & x\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta + \beta & \beta + \alpha & \theta + \alpha \end{bmatrix}$$

DE AQUÍ:

$$\begin{cases} x\theta = \theta + \beta \rightarrow \theta(x-1) = \beta \\ y\beta = \beta + \alpha \rightarrow \beta(y-1) = \alpha \\ x\alpha = \theta + \alpha \rightarrow \alpha(x-1) = \theta \end{cases} \quad (*)$$

MULTIPLICANDO:

$$\cancel{\theta}\alpha(x-1)(y-1)(x-1) = \cancel{\beta}\theta$$

$$\therefore (x-1)(y-1)(x-1) = \underline{1}$$

$$(44) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{CONDICIÓN: } i a_{ig} + g a_{gi} = i^2 + g^2$$

DANDO VALORES:

$$i=g=1 \rightarrow a_{11} + a_{11} = 2$$

$$\text{DE AQUÍ: } a_{11} = \underline{1}$$

$$i=g=2 \rightarrow 2a_{22} + 2a_{22} = 8$$

$$\text{DE AQUÍ: } a_{22} = \underline{2}$$

$$i=1; g=2 \rightarrow a_{12} + 2a_{21} = 5$$

EN LO PEDIDO:

$$\underbrace{a_{11}}_1 a_{12} + \underbrace{a_{21}}_2 \underbrace{a_{22}}_{\text{CONOCIDO}} = a_{12} + 2a_{21}$$

$$\therefore a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 5$$

$$(45) \text{CONDICIÓN: } AA^t B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

REEMPLAZANDO LAS MATRICES:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 11 \\ 9 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{OBT: } a=22; b=11; c=9; d=15$$

$$\therefore ab + cd = 242 + 135 = \underline{377}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

XI

CAPÍTULO

Álgebra

01 RECUERDE

DADO EL SISTEMA:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

SE RÁ COMPATIBLE INDETERMINADO (INFINITAS SOLUCIONES),

$$\text{SI } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

APLICANDO EN EL SISTEMA DADO, SE DEBE CUMPLIR:

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{-3m} = \frac{1}{2m+3}$$

(1) (2) (3)

$$\bullet \text{ DE (1) = (2): } \frac{1}{m} = -\frac{1}{3} \rightarrow m = -3$$

VERIFICANDO EN (1) CON (3):

$$\frac{1}{-3} = \frac{1}{-3} \checkmark \therefore m = -3$$

02

$$x + y + z = 1 \dots (1)$$

$$x + 4y + 2z = 3 \dots (2)$$

$$2x + 5y + 3z = 4 \dots (3)$$

Obs: EL SISTEMA ES DEPENDIENTE. LA EC. (1) RESULTA DE RESTAR LA EC. (3) CON LA EC. (2). OSEA QUE EL SISTEMA EN SÍ CONSTA DE 2 ECUACIONES CON 3 INCÓGNITAS; POR TANTO, EL SISTEMA TENDRÁ INFINITAS SOLUCIONES.

SÓLO HABRÁ QUE VERIFICAR QUE ALTERNATIVA SATISFACE A CUALESQUIERA DOS ECUACIONES DE LAS 3.

ESTA ES LA ALTERNATIVA D

03 RECUERDE

DADO EL SISTEMA:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

SE RÁ COMPATIBLE DETERMINADO (SOLUCIÓN ÚNICA),

$$\text{SI } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

APLICANDO EN EL SISTEMA, SE DEBE CUMPLIR:

$$\frac{n-1}{2n+1} \neq \frac{n-2}{n+2}$$

$$\rightarrow n^2 + n - 2 \neq 2n^2 - 3n - 2$$

$$\rightarrow n^2 - 4n \neq 0 \rightarrow n(n-4) \neq 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } n \neq 0 \wedge n \neq 4$$

$$\therefore n \in \mathbb{R} - \{0; 4\}$$

$$04 \quad 2x + y + z = 40 \dots (1)$$

$$3y - z = 40 \dots (2)$$

SI x, y, z ESTÁN EN P.A. DE RAZÓN $r \Rightarrow y = x + r \wedge z = x + 2r$

$$\text{EN (1): } 2x + x + r + x + 2r = 40$$

$$\rightarrow 4x + 3r = 40 \dots (\alpha)$$

$$\text{EN (2): } 3(x + r) - (x + 2r) = 40$$

$$\rightarrow 2x + r = 40 \dots (\beta)$$

$$\bullet (\alpha) - 3(\beta): -2x = -80 \rightarrow x = 40$$

$$\text{EN (I): } 2x + y + z = 40$$

$$40 + x + y + z = 40$$

$$\therefore x + y + z = 0$$

05 RECUERDE

DADO EL SISTEMA:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

SEÁ INCOMPATIBLE (NO TIENE SOLUCIÓN),

$$\text{SI } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

APLICANDO EN EL SISTEMA DADO, SE DEBE CUMPLIR:

$$\frac{3-\alpha}{\alpha-2} = \frac{5}{2} \neq \frac{4}{6}$$

(1) (2)

$$\bullet \text{DE (1) = (2): } 6 - 2\alpha = 5\alpha - 10$$

$$\rightarrow 7\alpha = 16 \quad \therefore \alpha = 16/7$$

$$\bullet 06 \quad 15x + 2y + 3z = 24 \dots (1)$$

$$6x + y = 12 \dots (2)$$

$$3x + y + 3z = 6 \dots (3)$$

$$\bullet (1) - (3): 12x + y = 18 \dots (4)$$

$$\bullet 2(2) - (4): y = 6 \quad \therefore \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

07 RESOLVAMOS APLICANDO DETER

MINANTES (REGLA DE CRAMER):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta_x = abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

ADemás:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \quad \therefore x = abc$$

$$\bullet 08 \text{ SEA } x + y + 2z = 3 \dots (1)$$

$$x + 2y - z = 1 \dots (2)$$

$$by + z = 2 \dots (3)$$

$$\text{DE (2) - (1): } y - 3z = -2 \dots (4)$$

DE (3) y (4) PARA QUE TENGA INFINITAS SOLUCIONES (VER RECUERDE DE LA RESOLUCIÓN 1), SE DEBE CUMPLIR:

$$\frac{b}{1} = \frac{1}{-3} = \frac{2}{-2}$$

$$\text{OBS: } b = -\frac{1}{3} \wedge 2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{3}$$

09) RECUERDE

EL SISTEMA:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

SERÁ COMPATIBLE DETERMINADO

SI $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

DEL SISTEMA DADO, SE TIENE:

$$\begin{cases} 2x + (2+1)y = 7 \\ 22x + (2+3)y = 13 \\ 32x + (2+8)y = 22 \end{cases}$$

DE AQUÍ, SE DEBE CUMPLIR:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2+1 & 7 \\ 22 & 2+3 & 13 \\ 32 & 2+8 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

$\cdot f_2 - 2f_1; f_3 - 3f_1:$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2+1 & 7 \\ 0 & -2+1 & -1 \\ 0 & -22+5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

DE AQUÍ: $(2) \begin{vmatrix} -2+1 & -1 \\ -22+5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

COMO $2 \neq 0 \Rightarrow -2+1-22+5=0$
 $\rightarrow 32=6 \quad \therefore 2=2$

10) SEA $(n+4)x + ny = 1 \dots (1)$

$nx + (n-4)y = 1 \dots (2)$

$\cdot (1) - (2): 4x + 4y = 0 \rightarrow x = -y$

EN (1): $(n+4)(-y) + ny = 1$

$\rightarrow -ny - 4y + ny = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{4}$

CON ESTO, VEMOS QUE: $x = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{x_0 y_0} = -16$

11) APLÍQUESE EL RECUERDE DE LA RESOLUCIÓN 1 (REVISE)

DEBE CUMPLIR:

$$\frac{t^2 - 3m + 4}{m} = \frac{t}{3} = \frac{2m}{m}$$

OBSÉRVESE: $t = 6$

ADemás: $36 - 3m + 4 = 2m$

DE AQUÍ: $m = 8$

$\therefore m + t = 14$

12) REEMPLAZANDO TENEMOS:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + y \\ -4x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

DE AQUÍ:

$\cdot 2x + y = \lambda x \rightarrow (\lambda - 2)x - y = 0$

$\cdot -4x - 3y = \lambda y \rightarrow 4x + (\lambda + 3)y = 0$

DE AQUÍ; COMO $x \neq 0 \wedge y \neq 0$

$\Delta_S = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 + 4 = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2 \vee \lambda_2 = 1$$

$$\therefore \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \underline{5}$$

(13) DEL SISTEMA DADO:

$$\frac{x}{mn} - \frac{y}{n^2} = 1 - m^2 \dots (1)$$

DE LA OTRA ECUACIÓN, DIVIDIMOS POR m :

$$\frac{x}{mn} + \frac{y}{m^2} = 1 + n^2 \dots (2)$$

$$(2) - (1): \frac{y}{m^2} + \frac{y}{n^2} = n^2 + m^2$$

$$\rightarrow y \left(\frac{n^2 + m^2}{m^2 n^2} \right) = n^2 + m^2$$

$$\text{DE AQUÍ: } y = m^2 n^2 \rightarrow \sqrt{y} = |mn|$$

COMO $mn < 0$ (DATO)

$$\Rightarrow |mn| = -mn$$

$$\therefore \sqrt{y} = \underline{-mn}$$

(14) APLIQUEMOS EL RECUERDE DE LA RESOLUCIÓN (5) (REVISE):

\Rightarrow SE DEBE CUMPLIR:

$$\frac{m}{6} = \frac{1}{m-1} \neq \frac{3}{2m}$$

(1) (2) (3)

$$\text{DE (1) = (2): } \underline{m^2 - m - 6 = 0}$$

$$(m-3)(m+2) = 0$$

$$\rightarrow m = 3 \vee m = -2$$

X ✓

OBS: $m = 3$ NO VERIFICA LA DESIGUALDAD (2) \neq (3)

$$\therefore \text{C.S.} = \underline{\{-2\}}$$

$$(15) by + cz = k + 1 \dots (1)$$

$$bx - z = k^2 + 1 \dots (2)$$

$$cx + y = k^3 + 1 \dots (3)$$

$$(2) \times c + (1):$$

$$bcx - cz = c(k^2 + 1)$$

$$by + cz = k + 1$$

$$\underline{bcx + by = c(k^2 + 1) + (k + 1)}$$

M

$$\begin{cases} bcx + by = M \\ cx + y = k^3 + 1 \end{cases}$$

OBS: PARA QUE EL SISTEMA MOSTRADO TENGA SOLUCIÓN ÚNICA

$$\nabla \frac{b}{c} \neq \frac{b}{1} \rightarrow b \neq b$$

¡ABSURDO!

CONCLUSIÓN: EL SISTEMA NO ADMITE SOLUCIÓN ÚNICA PARA ALGÚN $k \in \mathbb{R}$

$$\therefore k \text{ TOMA } \underline{0 \text{ VALORES}}$$

(16) 1º TUBO, LLENA SOLO EN x h
2º TUBO, LLENA SOLO EN y h

JUNTOS EN UNA HORA, LLENA:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \dots (1)$$

SI EL 2º TUBO FUERA DESAGÜE, EL 1º TUBO LLENARÍA EN UNA HORA:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{52} \dots (2)$$

$$(1) - (2): 2\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{20} - \frac{1}{52}$$

$$2\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{32}{20 \times 52}$$

$$\text{TUBO MEJOR} \rightarrow y = \frac{20 \times 52}{16}$$

SIMPLIFICANDO: $y = 65$

\therefore LA MEJOR LO
LLEVARÁ EN: $65h$

(17) (*) (I) es F.

Por ejemplo, dado el sistema
de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \\ 2x+y=10 \end{cases}$$

Ésta, NO ADMITE SOLUCIÓN.

(**) (II) es V

UN SISTEMA LINEAL DONDE
HAY MÁS INCÓGNITAS QUE ECUA-
CIONES es COMPATIBLE INDETER-
MINADO

(***) (III) es V

TODO SISTEMA LINEAL DE E-
CUACIONES QUE POSEA AL MENOS
DOS SOLUCIONES, SIEMPRE SERÁ
COMPATIBLE INDETERMINADO

\therefore FVV

(18) $4a - 2b + c = 8 \dots (1)$

$16a - 4b + c = 64 \dots (2)$

$9a - 3b + c = 27 \dots (3)$

$(2)-(1): 12a - 2b = 56$
 $6a - b = 28 \dots (4)$

$(3)-(2): -7a + b = -37 \dots (5)$

$(4)+(5): a = 9$

$(4): b = 26$

$FN(1): 36 - 52 + c = 8$

$\rightarrow c = 24$

$\therefore \frac{2a+b}{c} = \frac{11}{6}$

(19) $3x + z + w = 4 \dots (1)$

$x - y + 2z + w = 1 \dots (2)$

$2x - y + 3z - w = -3 \dots (3)$

$-x + 3y - z + 2w = 4 \dots (4)$

$(1)-(2): 2x + y - z = 3 \dots (5)$

$(1)+(3): 5x - y + 4z = 1 \dots (6)$

$(1)+(2)-(4): 5x - 4y + 4z = 1 \dots (7)$

$(6)-(7): 3y = 0 \rightarrow y = 0$

$FN(5): 2x - z = 3$

$FN(6): 5x + 4z = 1$

RESOLVIENDO (*): $x = 1; z = -1$

$FN(1): 3 + (-1) + w = 4 \rightarrow w = 2$

$\therefore xw + yz = 2 + 0 = 2$

(20) $mx^2 + nxy + 1 = 0 \dots (1)$

$(m-1)x^2 + ny^2 - 1 = 0 \dots (2)$

Por dato: $(x; y) = (3; -1)$

O sea: $x = 3; y = -1$

$FN(1): 9m - 3n = -1 \dots (3)$

$FN(2): 9(m-1) + n = 1$

$\rightarrow 9m + n = 10 \dots (4)$

$(4)-(3): 4n = 11 \therefore n = \frac{11}{4}$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR Y NO LINEALES

XII

CAPÍTULO

Algebra

01 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \dots (1)$

$x^2 - y^2 = 7 \dots (2)$

DE (1): $12(x^2 + y^2) = 25xy$

$12x^2 - 25xy + 12y^2 = 0$

$4x \quad -3y$

$3x \quad -4y$

$(4x-3y)(3x-4y) = 0$

* SI $4x-3y=0 \rightarrow x = \frac{3}{4}y \quad (\alpha)$

EN (2): $\frac{9}{16}y^2 - y^2 = 7$

$-\frac{7}{16}y^2 = 7 \rightarrow y^2 = -16 \rightarrow y = \pm 4i$

EN (α) : $x = \pm 3i$

AQUÍ, HAY 2 SOLUCIONES

** SI $3x-4y=0 \rightarrow x = \frac{4}{3}y \quad (\beta)$

EN (2): $\frac{16}{9}y^2 - y^2 = 7$

$\frac{7}{9}y^2 = 7 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$

EN (β) : $x = \pm 4$

AQUÍ, 2 SOLUCIONES MÁS

\therefore #TOTAL DE SOLUCIONES: 4

02 CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

RESUELVA EL SISTEMA SI:

PUENTE:

$$\begin{cases} 1+xy=y \\ 1+xz=z \\ \frac{x+2z}{2}=yz \end{cases}$$

INDIQUE SU SOLUCIÓN EN Q

$1+xy=y \dots (1) ; 1+xz=z \dots (2)$

$\frac{x+2z}{2}=yz \dots (3)$

$(1)-(2): xy-xz=y-z$

$\rightarrow x(y-z)-(y-z)=0$

$\rightarrow (y-z)(x-1)=0$

DE AQUÍ: $y=z ; x=1$ (NO VERIFICA (1))

DE (1): $xy=y-1 \rightarrow x = \frac{y-1}{y}$

ADemás: $y=z$

EN (3): $\frac{\frac{y-1}{y} + 2y}{2} = y^2$

$\rightarrow y-1+2y^2 = 2y^3$

$\rightarrow 2y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0$

$2y^2(y-1) - (y-1) = 0$

$(y-1)(2y^2-1) = 0$

DE AQUÍ: $y=1 \vee y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$

LUEGO:

SI $y=1 \rightarrow z=1 \wedge x=0$

\therefore C.S. = $\{(0; 1; 1)\}$

03 $2x^2 + 5xy = 18y^2 \dots (1)$

$$2xy + y^2 = -32 \dots (2)$$

$$xy < 0 \dots (3)$$

$$\bullet \underline{DE(1)}: 2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & 9y \\ & \nearrow & \searrow \\ & x & -2y \end{array}$$

$$(2x + 9y)(x - 2y) = 0$$

$$\bullet \text{SI } 2x + 9y = 0 \rightarrow x = -\frac{9}{2}y \quad (\alpha)$$

$$\underline{EN(2)}: 2\left(-\frac{9}{2}y\right)y + y^2 = -32$$

$$\rightarrow -8y^2 = -32 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$$\bullet \text{SI } y = 2; \underline{EN(\alpha)}: x = -9$$

$$\hookrightarrow x + y = -7$$

$$\bullet \text{SI } y = -2; \underline{EN(\alpha)}: x = 9$$

$$\hookrightarrow x + y = 7$$

NOTA: SI $x = 2y$
¡NO VERIFICA (3)!

$$\textcircled{04} \quad x^2 + xy + y^2 = 37 \dots (1)$$

$$x + y = 7 \dots (2)$$

$$\underline{(2)^2}: x^2 + 2xy + y^2 = 49 \dots (3)$$

$$\underline{(3) - (1)}: xy = 12$$

$$\text{PERO: } x + y = 7$$

$$\underline{DE AQUÍ}: (i) \quad x = 4 \wedge y = 3$$

$$(ii) \quad x = 3 \wedge y = 4$$

$$\therefore y - x = 1 \text{ ó } -1$$

$$\textcircled{05} \quad xy^2 + xy + z = -1 \dots (1)$$

$$x^2y + yz + x = 1 \dots (2)$$

$$zxy^2 - xy = z + 1 \dots (3)$$

$$\underline{(1) + (3)}: xy^2 + zxy^2 = 0$$

$$xy^2(1 + z) = 0$$

$$\bullet \text{SI } x = 0, \underline{EN(1)}: z = -1$$

$$\underline{EN(2)}: y = -1$$

$$\hookrightarrow \text{SOLUCIÓN ES: } (0; -1; -1)$$

$$\bullet \text{SI } y = 0, \underline{EN(1)}: z = -1$$

$$\underline{EN(2)}: x = 1$$

$$\hookrightarrow \text{SOLUCIÓN ES: } (1; 0; -1)$$

• SI $z = -1$, SE OBTIENE SOLUCIONES IGUALES A LAS ANTERIORES

$$\therefore \# \text{ DE SOLUCIONES: } 2$$

$$\textcircled{06} \quad x^2 - y^2 + z^2 = 16 \dots (1)$$

$$x - y + z = 4 \dots (2); z < 0$$

$$\underline{DE(1)}: x^2 - y^2 = 16 - z^2$$

$$\rightarrow (x + y)(x - y) = (4 + z)(4 - z) \dots (\alpha)$$

$$\underline{DE(2)}: x - y = 4 - z \dots (\beta)$$

$$\bullet \underline{(\beta) EN(\alpha)}:$$

$$(x + y)(x - y) = (4 + z)(x - y)$$

$$\rightarrow x + y = 4 + z \dots (\theta)$$

$$\underline{(\beta) + (\theta)}: x = 4 \dots (\phi)$$

$$\underline{(\theta) \times (\phi)}: x^2 + xy = 16 + 4z$$

$$\underline{DE AQUÍ}: x^2 + xy - 4z = 16$$

07 $x^2 - y^2 = 3xy \dots (1)$
 $x^4 + y^4 = \beta x^2 y^2 \dots (2)$
 $(1)^2: x^4 + y^4 - 2x^2 y^2 = 9x^2 y^2$
 $\rightarrow x^4 + y^4 = 11x^2 y^2 \dots (3)$

DE (2) y (3): $\beta = 11$

OB^j: CUANDO $\beta = 11$, EL SISTEMA DADO ES DEPENDIENTE, (2) ES CONSECUENCIA DE (1) O VICEVERSA. EN EL FONDO SE TRATARÍA DE UNA ECUACIÓN CON DOS INCÓGNITAS, EL SISTEMA SERÁ COMPATIBLE INDETERMINADO.

09 HAGAMOS $x+y+z=2$.
 REEMPLAZANDO TENEMOS:

$2 = x + 1 \dots (1)$

$2 = y + 2 \dots (2)$

$3 = z + 3 \dots (3)$

$(1)+(2)+(3): 6 = 2 + 6 \rightarrow 2 = \frac{6}{5}$

EN (1): $\frac{6}{5} = x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$

EN (2): $\frac{12}{5} = y + 2 \rightarrow y = \frac{2}{5}$

EN (3): $\frac{18}{5} = z + 3 \rightarrow z = \frac{3}{5}$

$\therefore 4x + 2y + 3z = \frac{17}{5}$

08 EL SISTEMA DADO SE PUEDE ESCRIBIR:

$|x| - y = 1 \dots (1)$

$x - |y| = 3 \dots (2)$

DE (1): $|x| = y + 1 \rightarrow y \geq -1 \dots (\alpha)$

LUEGO:

$x = y + 1 \vee x = -(y + 1)$

SI $x = y + 1$; EN (2): $y + 1 - |y| = 3$

DE AQUÍ: $|y| = y - 2 \rightarrow y \geq 2$

LUEGO:

$y = y - 2, \vee y = -(y - 2)$
 $\neq y \quad y = 1 \quad x$

(NO ES ≥ 2)

SI $x = -y - 1$; EN (2): $-y - 1 - |y| = 3$

DE AQUÍ: $|y| = -y - 4 \rightarrow y \leq -4$

PERO, VIENDO $(\alpha): y \geq -1$

DE AQUÍ: $\neq y$

EN CONSECUENCIA: NO HAY SOLUCIÓN

$\therefore \# \text{ DE SOLUCIONES: } 0$

10 DEL SISTEMA, VEMOS QUE:

$5 - x = 4 + y = 3 - z = k \dots (I)$

DE AQUÍ:

$x = 5 - k; y = k - 4; z = 3 - k$

REEMPLAZANDO EN LA 1ª EC.:

$(5 - k)(k - 4)(3 - k) = 5 - (5 - k)$

$(k - 5)(k - 4)(k - 3) = k$

$\rightarrow k^3 - 12k^2 + 46k - 60 = 0$

| | | | | |
|---------|---|-----|-----|-----|
| $k = 6$ | 1 | -12 | 46 | -60 |
| | ↓ | 6 | -36 | 60 |
| | 1 | -6 | 10 | 0 |

$\therefore (k - 6)(k^2 - 6k + 10) = 0$

* $k - 6 = 0 \rightarrow k = 6$

* $k^2 - 6k + 10 = 0 \rightarrow k = 3 + i$

* $k^2 - 6k + 10 = 0 \rightarrow k = 3 - i$

OB^j: k TOMA 3 VALORES $\neq 5$

EN (I): POR CADA VALOR DE k

EXISTE UNA TERNA (x, y, z)

$\therefore \# \text{ DE TERNAS SOLUCIÓN: } 3$

$$(11) \sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}} + \sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}} = 4 \dots (1)$$

$$\dots (1) \Rightarrow x+2y = 1 \dots (2)$$

$$\text{DE (1): } x+\sqrt{x^2-y^2} \geq 0 \quad ?$$

$$\wedge x-\sqrt{x^2-y^2} \geq 0 \wedge x^2 \geq y^2$$

$$(1)^2: x+\sqrt{x^2-y^2}+2\sqrt{x^2-(x^2-y^2)} \geq$$

$$+x-\sqrt{x^2-y^2} = 16$$

$$\Rightarrow 2x+2\sqrt{y^2} = 16$$

ANALICEMOS 2 CASOS:

$$(i) \text{ SI } y \geq 0 \rightarrow 2x+2y=16 \dots (3)$$

$$\text{DE (2) y (3): } x=15 \rightarrow y=-8' < 0$$

$$(ii) \text{ SI } y < 0 \rightarrow 2x-2y=16 \dots (4)$$

$$\text{DE (2) y (4): } x=\frac{17}{3} \rightarrow y=-\frac{7}{3}$$

$$\text{O SEA: } x_0 = \frac{17}{3}, y_0 = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore x_0 + y_0 = \frac{10}{3}$$

$$(13) (t^2-1)x^2+tx+y=1 \dots (1)$$

$$2x+y=-1 \dots (2)$$

$$(1)-(2): (t^2-1)x^2+(t-2)x=2$$

$$\rightarrow (t^2-1)x^2+(t-2)x-2=0$$

AQUÍ, PARA QUE HAYA SOLUCIÓN ÚNICA PARA x , SE DEBE CUMPLIR:

$$\Delta=0 \Rightarrow (t-2)^2-4(t^2-1)(-2)=0$$

$$\rightarrow t^2-4t+4+8t^2-8=0$$

$$9t^2-4t-4=0$$

$$\text{DE AQUÍ: } \Delta > 0$$

$$\Rightarrow \text{EXISTEN } t_1 \text{ y } t_2 \in \mathbb{R}$$

(2 VALORES REALES)

¡OJO! PERO VEÁSE, CUANDO $t=1$

Ó $t=-1$; AL REEMPLAZAR ARRIBA

SE GENERAN 2 SISTEMAS QUE TIENEN

SOLUCIONES ÚNICAS.

$\therefore t$ TOMA 4 VALORES REALES

$$(12) x^2+y^2+2z=k \dots (1)$$

$$x+3y=z \dots (2)$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ EN (1): } x^2+y^2+2(x+3y)=k$$

$$\rightarrow x^2+2x+y^2+6y=k$$

COMPLETAMOS CUADRADOS:

$$x^2+2x+1+y^2+6y+9=k+10$$

$$(x+1)^2+(y+3)^2=k+10$$

OBJ: SI $k+10=0 \Rightarrow$ COMO $x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x=-1; y=-3 \text{ O SEA QUE LA}$$

SOLUCIÓN ÚNICA ES: $(x; y) = (-1; -3)$

$$\therefore k = -10$$

$$(14) \text{ SEA } \frac{1}{3x-y}=a \wedge \frac{1}{y+2x}=b$$

$$\text{LUEGO: } 2a+5b=2 \dots (1)$$

$$4a-3b=17 \dots (2)$$

$$3(1)+5(2): 6a+15b=6$$

$$20a-15b=85$$

$$26a = 91$$

$$\rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$\text{EN (1): } b = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x-y} = \frac{7}{2} \wedge \frac{1}{y+2x} = -1$$

$$\rightarrow 3x-y = \frac{2}{7} \wedge y+2x = -1$$

$$\text{SUMANDO: } 5x = -\frac{5}{7} \therefore x = -\frac{1}{7}$$

$$\textcircled{15} \text{ Sea: } \sqrt[3]{5x+14} = a \rightarrow 5x+14 = a^3$$

$$\sqrt[3]{5y-12} = b \rightarrow 5y-12 = b^3$$

$$\text{SUMANDO: } 5(x+y)+2 = a^3+b^3$$

$$\rightarrow x+y = \frac{a^3+b^3-2}{5}$$

REEMPLAZANDO EN LAS ECUACIONES:

$$a+b = 6 \dots (1)$$

$$\frac{a^3+b^3-2}{5} = 14$$

$$\text{DE AQUÍ: } a^3+b^3 = 72 \dots (2)$$

$$(1)^3: \frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{72} = \frac{6^3}{6}$$

$$18ab = 144 \rightarrow ab = 8 \dots (3)$$

$$\bullet \text{ DE (1) y (3): } \begin{cases} a=4 \wedge b=2 \\ \vee \\ a=2 \wedge b=4 \end{cases}$$

LUEGO; DE LOS 2 CASOS:

$$\bullet \text{ SI } a=4 \wedge b=2$$

$$\text{VEMOS QUE: } x_1 = 10; y_1 = 4$$

$$\bullet \text{ SI } a=2 \wedge b=4$$

$$\text{VEMOS QUE: } x_2 = -\frac{6}{5}; y_2 = \frac{16}{5}$$

$$\hookrightarrow \text{C.S.} = \{(10; 4); (-\frac{6}{5}; \frac{16}{5})\}$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{96}{5}$$

$$\textcircled{16} \quad y + x(x-4) = 0 \dots (1)$$

$$y - 2x^2 = 0 \dots (2)$$

$$\bullet (1) - (2): x^2 - 4x + 2x^2 = 0$$

$$\rightarrow x(3x-4) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3} = x_0$$

$$\text{OJ: } x_0 = \frac{4}{3}, \text{ VERIFICA: } 2^{x_0} > 1$$

$$\bullet \text{ LUEGO: SI } x = \frac{4}{3},$$

$$\bullet \text{ EN (2): } y = 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 \rightarrow y = \frac{32}{9} = y_0$$

$\textcircled{17}$ Si la TERNA $(x_0; y_0; z_0)$ es solución del SISTEMA, ENTONCES:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \sqrt{15} \dots (1)$$

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0 \dots (2)$$

$$\bullet (2)^2: x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2(x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0) = 0$$

$$x_0 z_0 + y_0 z_0 = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{15} + 2(x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0) = 0$$

$$\rightarrow x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0 = -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

ELEVAMOS AL CUADRADO, SE TIENE:

$$(x_0 y_0)^2 + (x_0 z_0)^2 + (y_0 z_0)^2 +$$

$$+ 2x_0 y_0 z_0 (x_0 + y_0 + z_0) = \frac{15}{4}$$

VALE 0

$$\bullet \text{ DE AQUÍ: } (x_0 y_0)^2 + (x_0 z_0)^2 + (y_0 z_0)^2 = \frac{15}{4}$$

$$\textcircled{18} \quad (x+z)+y = 6 \dots (1)$$

$$(x+z)y = 9 \dots (2)$$

$$xz = -1 \dots (3)$$

$$\bullet \text{ DE (1) y (2): } x+z=3 \wedge y=3$$

FORMAMOS UNA ECUACIÓN DE 2º

GRADO QUE ADMITA POR RAÍCES A $x \wedge z$; ÉSTA ES:

$$t^2 - (3)t + (-1) = 0; \text{ DE AQUÍ:}$$

$$\hookrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\hookrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \wedge z = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{ó } x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \wedge x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore \Sigma \text{ DE LAS "x": } 3$$

19) $x^2 + x^2y^2 + y^2 = 49 \dots (1)$

$$x + xy + y = 11 \dots (2)$$

• DE (2): $x + y = 11 - xy$

• AL CUADRADO:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 121 - 22xy + x^2y^2 \dots (3)$$

• (1) - (3):

$$x^2y^2 - 2xy = -72 + 22xy - x^2y^2$$

$$2x^2y^2 - 24xy + 72 = 0$$

$$(xy)^2 - 12(xy) + 36 = 0$$

$$(xy - 6)^2 = 0 \rightarrow xy = 6$$

EN (2): $x + y = 5$

DE AQUÍ: $x = 3 \wedge y = 2$

v

$$x = 2 \wedge y = 3$$

\therefore Mayor valor de $x - y$: 1

20) $x^2 + y^2 = 3 \dots (1)$

$$y = x + b \dots (2)$$

• (2) EN (1): $x^2 + (x + b)^2 = 3$

$$\rightarrow x^2 + x^2 + 2bx + b^2 = 3$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2bx + (b^2 - 3) = 0$$

AQUÍ, PARA QUE EL SISTEMA TENGA SOLUCIÓN ÚNICA, x DEBE SER ÚNICO

CO $\Delta = 0$

$$\Delta = (2b)^2 - 4(2)(b^2 - 3) = 0$$

$$4b^2 - 4(2b^2 - 6) = 0$$

$$\rightarrow -b^2 + 6 = 0 \rightarrow b^2 = 6$$

DONDE: $b = \pm\sqrt{6}$

$$\therefore \text{C.S.} = \{\sqrt{6}; -\sqrt{6}\}$$

21) SEA $2\alpha + \sqrt{\alpha + \beta} = 5 \dots (1)$

$$\beta - \sqrt{\alpha + \beta} = 5 \dots (2)$$

(1) + (2): $2\alpha + \beta = 10$

$$\rightarrow \alpha + \beta = 10 - \alpha$$

EN (1): $2\alpha + \sqrt{10 - \alpha} = 5$

$$\rightarrow \sqrt{10 - \alpha} = 5 - 2\alpha \dots (3)$$

DEBE SER (+) ó 0

$$5 - 2\alpha \geq 0 \rightarrow \alpha \leq \frac{5}{2}$$

(3)²: $10 - \alpha = 25 - 20\alpha + 4\alpha^2$

$$4\alpha^2 - 19\alpha + 15 = 0$$

$$4\alpha \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \times \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} -15 \\ -1 \end{array}$$

$$(4\alpha - 15)(\alpha - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{15}{4} \quad \vee \quad \alpha = 1 \quad (\alpha \leq \frac{5}{2})$$

x

v

COMO $2\alpha + \beta = 10 \rightarrow \beta = 8$

$$\therefore \alpha\beta = (1)(8) = 8$$

22) $x^2 + y^2 = 41 \dots (1)$

$$\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \dots (2)$$

SEA: $\sqrt{x + y} = a \rightarrow (x + y)^2 = a^4 (I)$

$$\sqrt{x-y} = b \rightarrow (x-y)^2 = b^4 \quad (\text{II})$$

(I)+(II); APLICAMOS LEGENDRE:

$$2(x^2+y^2) = a^4 + b^4$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = \frac{a^4 + b^4}{2}$$

EL SISTEMA QUEDARÁ ASÍ:

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 82 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

ELEVAMOS A LA 4ª, LA 2ª EC.:

$$\underbrace{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}_{(82)} = 256$$

$$4ab(a^2+b^2) + 6a^2b^2 = 256 - 82$$

$$2ab[(a+b)^2 - 2ab] + 3a^2b^2 = 87$$

$$\rightarrow 32ab - 4a^2b^2 + 3a^2b^2 = 87$$

$$\text{DE AQUÍ: } (ab)^2 - 32(ab) + 87 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} ab & & -29 \\ & \nearrow & \searrow \\ ab & & -3 \end{array}$$

$$(ab - 29)(ab - 3) = 0$$

$$\rightarrow ab = 29 \vee ab = 3$$

ANALICEMOS EL CASO:

$$(i) \quad ab = 3 \wedge a + b = 4$$

$$\text{DE AQUÍ: } a = 3 \wedge b = 1$$

v

$$a = 1 \wedge b = 3$$

DONDE:

$$\bullet \text{ Si } a = 3 \wedge b = 1$$

$$\rightarrow \sqrt{x+y} = 3 \wedge \sqrt{x-y} = 1$$

$$\rightarrow x+y = 9 \wedge x-y = 1$$

$$\text{RESOLVIENDO: } x = 5 \rightarrow \alpha$$

$$y = 4 \rightarrow \beta$$

$$\therefore \alpha + \beta = 9$$

$$\bullet \text{ Si } a = 1 \wedge b = 3$$

$$\rightarrow \sqrt{x+y} = 1 \wedge \sqrt{x-y} = 3$$

$$\rightarrow x+y = 1 \wedge x-y = 9$$

$$\text{RESOLVIENDO: } x = 5 \rightarrow \alpha$$

$$y = -4 \rightarrow \beta$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1$$

$$(ii) \quad ab = 29 \wedge a + b = 4$$

¡AQUÍ, NO HAY SOLUCIÓN REAL!

23 CORRECCIÓN

LA 3ª ECUACIÓN, DEBE DECIR:

$$x^2 + 2yz + 3z^2 = 10$$

$$x^2 + 2xy + 3xz = 50 \dots (1)$$

$$xy + 2y^2 + 3yz = 10 \dots (2)$$

$$xz + 2yz + 3z^2 = 10 \dots (3)$$

$$\bullet \text{ DE (1): } x(x+2y+3z) = 50$$

$$\bullet \text{ DE (2): } y(x+2y+3z) = 10$$

$$\bullet \text{ POR 2: } 2y(x+2y+3z) = 20 \quad (+)$$

$$\bullet \text{ DE (3): } z(x+2y+3z) = 10$$

$$\bullet \text{ POR 3: } 3z(x+2y+3z) = 30$$

SUMANDO Y FACTORIZANDO:

$$(x+2y+3z)(x+2y+3z) = 100$$

$$(x+2y+3z)^2 = 100$$

COMO $x, y, z \in \mathbb{R}^-$

$$\Rightarrow x+2y+3z = -10$$

REEMPLAZANDO ARRIBA:

$$x = -5 ; y = -1 ; z = -1$$

$$\therefore x+y+z = -7$$

24 CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

$$\begin{cases} (x+3y)(2x+y)+3x+5y = -\frac{20}{9} \\ 7x+3y = -3 \end{cases}$$

SEA: $(x+3y)(2x+y)+3x+5y = -\frac{20}{9}$ (1)

$7x+3y = -3$ (2)

DE (1), SE PUEDE ESCRIBIR:

$3(x+3y)(6x+3y)+27x+15(3y) = -20$

PERO, DE (2): $3y = -3-7x$

REEMPLAZANDO EN LO ANTERIOR:

$3(-3-6x)(-3-x)+27x+15(-3-7x) = -20$

$3(6x+3)(x+3)+27x-45-105x = -20$

$18x^2+63x+27+27x-45-105x = -20$

$18x^2-15x+2 = 0$

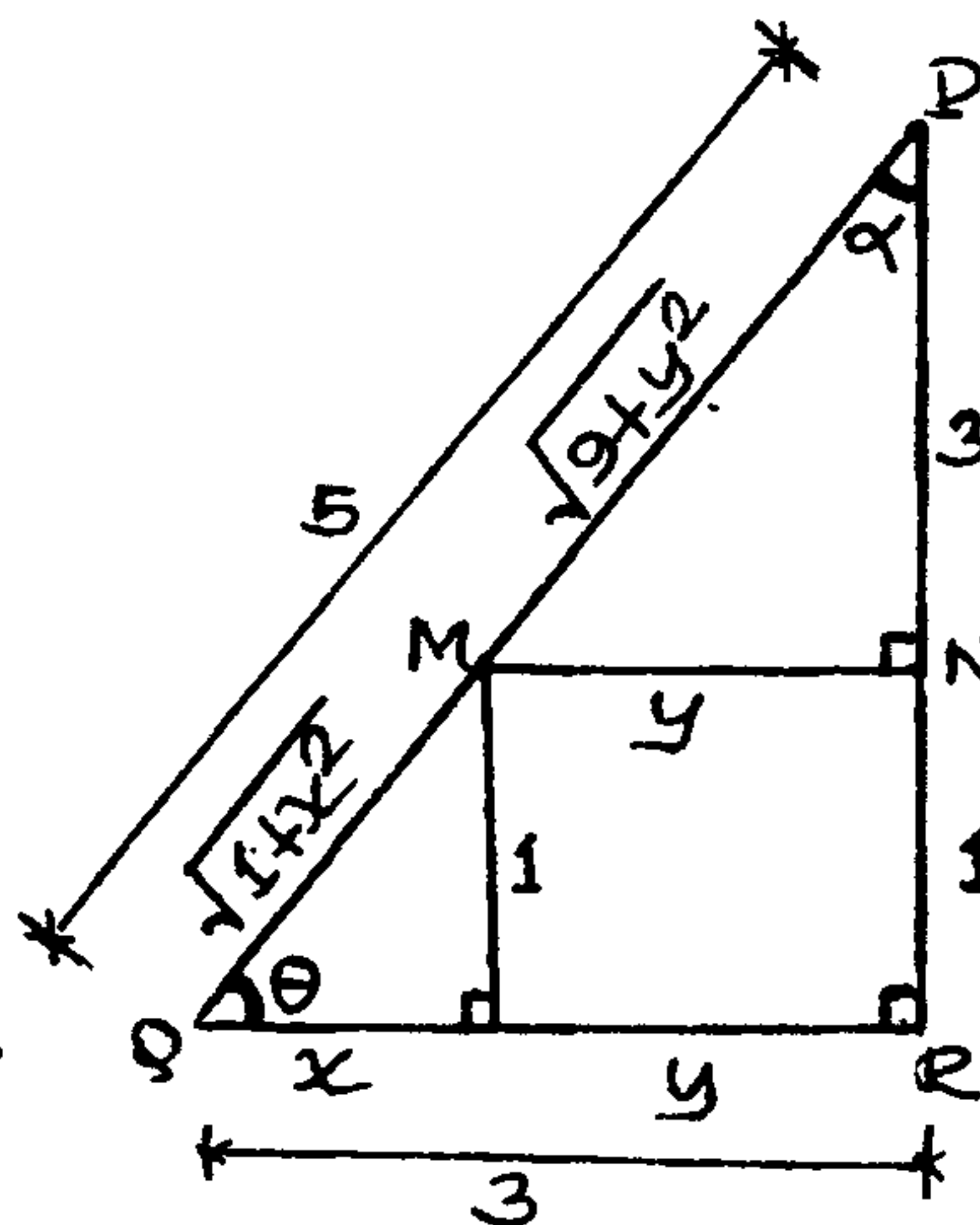
$6x \quad \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$
 $3x$

$(6x-1)(3x-2) = 0$

$x = \frac{1}{6} ; x = \frac{2}{3}$

SI $x = \frac{1}{6}$; EN (2): $y = -\frac{25}{18}$

$\therefore x+y = -\frac{11}{9}$ UN VALOR



OBSÉRVESE, SE GENERA UN Δ DE CATETOS 3; 4 y 5 (ES NOTABLE)

$\alpha = 37^\circ \wedge \theta = 53^\circ$

EN ΔPNM (TAMBIÉN DE 37° y 53°)

$PN = 3 = 4K \rightarrow K = \frac{3}{4}$

$MN = y = 3K \rightarrow y = \frac{9}{4}$

COMO $x+y = 3 \rightarrow x = 3 - \frac{9}{4}$

$x = \frac{3}{4}$

LUEGO:

$\frac{1}{x} + \frac{12}{y} = \frac{4}{3} + \frac{12 \cdot 4}{9 \cdot 3} = \frac{20}{3}$

25 ASUMAMOS 2 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA, UNO DE CATETOS x y 1 , EL OTRO DE CATETOS y y 3

DESIGUALDADES

XIII

CAPÍTULO

Algebra

01) Obs: $\lambda = (x)(y)\left(\frac{x+y}{xy-1}\right) \dots (\alpha)$

PERO TAMBIÉN, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\lambda = \frac{xy(x+y) - (xy-1)(x+y)}{xy-1}$$

$$= \frac{(x+y)(xy-1) + (x+y)}{xy-1}$$

DESDOBLANDO: $\lambda = x+y + \frac{x+y}{xy-1} \dots (\beta)$

DE (α) Y (β): $(x)(y)\left(\frac{x+y}{xy-1}\right) = x+y + \frac{x+y}{xy-1}$

NOTAR: "LA SUMA DE 3 CANTIDADES ES IGUAL AL PRODUCTO DE LAS MISMAS"
¡ESTO OCURRE CUANDO LAS 3 CANTIDADES SON IGUALES!

$$\Rightarrow x=y=\frac{x+y}{xy-1}$$

SI $x=y \Rightarrow x = \frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} = y$

PARA $x=y=-\sqrt{3}$; OBS. SE TIENE $\lambda_{MÍN}$

EN (α): $\lambda_{MÍN} = \frac{(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})(-2\sqrt{3})}{3-1} = -3\sqrt{3}$

02) COMO $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow (a^2b - ab^2)^2 \geq 0$$

$$\rightarrow a^4b^2 - 2a^3b^3 + b^4a^2 \geq 0$$

$$\rightarrow a^4b^2 + b^4a^2 \geq 2a^3b^3$$

• SUMAMOS $a^6 + b^6$:

$$a^6 + a^4b^2 + b^4a^2 + b^6 \geq a^6 + 2a^3b^3 + b^6$$

$$a(a^3+b^3) + b(a^3+b^3) \geq (a^3+b^3)^2$$

$$(a^3+b^3)(a+b) \geq 1(a^3+b^3)^2$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$\underline{a=b}$$

03) CONSIDERANDO QUE: $1 < \frac{1}{2} + \frac{6}{x} < 8$

FORMAMOS: $\frac{25x^2-16}{4} = \left(\frac{5x}{2}\right)^2 - 4$

DE LA CONDICIÓN,

• RESTO $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} < \frac{6}{x} < \frac{15}{2}$

• INVIERTO: $\frac{2}{15} < \frac{x}{6} < 2$

• POR 15: $2 < \frac{5x}{2} < 30$

• AL \square : $4 < \left(\frac{5x}{2}\right)^2 < 900$

• RESTO 4: $0 < \left(\frac{5x}{2}\right)^2 - 4 < 896$

$$0 < \frac{25x^2-16}{4} < 896$$

$$\therefore \left(\frac{25x^2-16}{4}\right) \in [0; 896)$$

04) HACIENDO $\sqrt{x} = a \rightarrow x = a^2$
($a \geq 0$)

• HALLAREMOS LA VARIACIÓN DE LA EXPRESIÓN:

$$\sqrt{2a^2-a} = \sqrt{2\left(a^2-\frac{a}{2}\right)}$$

CUANDO $1 < x < 9$ O SEA $1 < a^2 < 9$

• SACO $\sqrt{}$: $1 < a < 3$

• RESTO $\frac{1}{4}$: $\frac{3}{4} < a - \frac{1}{4} < \frac{11}{4}$

• AL \square : $\frac{9}{16} < a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{16} < \frac{121}{16}$

• RESTO $\frac{1}{16}$: $\frac{1}{2} < a^2 - \frac{a}{2} < \frac{15}{2}$

• Por 2: $1 < 2(\frac{x^2-2}{2}) < 15$

• Sacando: $1 < \sqrt{2(\frac{x^2-2}{2})} < \sqrt{15}$
 $\sqrt{2x^2-2}$

$\therefore \sqrt{2x^2-2}$ VARÍA EN: $(1; \sqrt{15})$

05) DE $24b = x^2 + 1 \rightarrow b = \frac{x^2 - x + 1}{4}$

COMPLETAMOS CUADRADOS

• HACEMOS QUITA Y PON DE $\frac{1}{4}$

$b = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$

$b = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

• LLEVAMOS $0' : (x - \frac{1}{2})^2 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

• SUMO $\frac{3}{4} : (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > \frac{3}{4}$
 $b > \frac{3}{4}$

$\therefore b \in [\frac{3}{4}; +\infty)$

06) CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

SEÑALE EL MÁXIMO VALOR DE n QUE VERIFICA

$\frac{1}{12} + \frac{2}{13} + \frac{3}{14} + \dots + \frac{n}{n+1} \leq \frac{5039}{5040}$

TRANSFORMEMOS CADA FRACCIÓN:

$\frac{1}{12} = \frac{2-1}{12} = \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$

$\frac{2}{13} = \frac{3-1}{13} = \frac{3}{13} - \frac{1}{13} = \frac{1}{4} - \frac{1}{13}$

$\frac{3}{14} = \frac{4-1}{14} = \frac{4}{14} - \frac{1}{14} = \frac{2}{7} - \frac{1}{14}$

$\frac{4}{15} = \frac{5-1}{15} = \frac{5}{15} - \frac{1}{15} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}$

\vdots

$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

• SUMANDO MIEMBRO Y CANCELANDO TÉRMINOS NOS QUEDA:

$\frac{1}{12} + \frac{2}{13} + \frac{3}{14} + \dots + \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

• CON ESTO, SE TIENE:

$1 - \frac{1}{n+1} \leq \frac{5039}{5040}$

• OBS: $5040 = 5040$

• DE AHÍ: $1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 - \frac{1}{5040}$

• POR (-1): $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{5040}$

• INVIERTO: $n+1 \leq 5040$

• DE AQUÍ: $n_{\text{MÁX}} = 5039$

07) CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

DETERMINE EL MÍNIMO VALOR...

• SE PUEDE ESCRIBIR:

$\theta = \frac{3}{2 + \frac{1}{\frac{1+\lambda+x^2}{\lambda}}} = \frac{3}{2 + \frac{\lambda}{1+\lambda+x^2}}$

AHORA, COMO $\lambda \in \mathbb{R}^+$, SE SABE Q' :

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$$

• SUMO 1: $\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda} \geq 3$

• INVIERTO: $0 < \frac{1}{\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}} \leq \frac{1}{3}$

• SUMO 2: $2 < 2 + \frac{1}{\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}} \leq \frac{7}{3}$

• INVIERTO: $\frac{3}{7} \leq \frac{1}{2 + \frac{1}{\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}}} < \frac{1}{2}$

• POR 3: $\frac{9}{7} \leq \frac{3}{2 + \frac{1}{\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}}} < \frac{3}{2}$

Obs: $\frac{9}{7} \leq \theta < \frac{3}{2}$

\therefore MÍN. VALOR DE θ : $\frac{9}{7}$

OB: $\lambda = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{\ddots}}}$
SIGUE SIENDO λ

$\lambda = x - \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = x$

COMO $x \in [-2; 2]$

$\therefore -2 \leq \lambda + \frac{1}{\lambda} \leq 2 \dots (I)$

SE SABE QUE:

• Si $\lambda > 0 \rightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$

• Si $\lambda < 0 \rightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \leq -2$

CON ESTO, PARA QUE SE VERIFI-

QUE (I), SÓLO CABE QUE:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = -2 \vee \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2$$

DE AQUÍ: $\lambda = -1$ DE ACÁ: $\lambda = 1$

$\therefore \lambda \in \{-1; 1\}$

RECUERDE

SIENDO $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p \in \mathbb{R}^+$

$\wedge n \in \mathbb{N}$

$$\text{Si } \sigma_n = \left(\frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_p^n}{p} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha \leq \sigma_\beta ; \forall \alpha \leq \beta$$

PARA $x, y, z \in \mathbb{R}^+$; $\alpha = 2 \wedge \beta = 3$,
SE VERIFICA QUE:

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

USANDO EL DATO: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$

$$\hookrightarrow \left(\frac{8}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ELEVO AL CUBO:

$$\left(\frac{8}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$



$$\frac{8}{3} \sqrt{\frac{8}{3}} \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$

DE AQUÍ: $x^3 + y^3 + z^3 \geq 16 \sqrt{\frac{2}{3}}$

\therefore MÍNIMO VALOR DE $x^3 + y^3 + z^3$ ES: $16 \sqrt{\frac{2}{3}}$

TÉNGASE EN CUENTA LO SIGUE:

RECUERDE

Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_p^n}{p} \geq \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{p} \right]^n$$

APLIQUEMOS PARA $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ y $n=3$.

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 \dots (\alpha)$$

Por dato: $81 \geq x^3 + y^3 + z^3$

DIVIDIDO POR 3: $27 \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \dots (\beta)$

DE (α) y (β) :

$$27 \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3$$

$$\Rightarrow 27 \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3$$

SACO 3^{ra}: $3 \geq \frac{x+y+z}{3}$

DE AQUÍ: $\frac{x+y+z}{3} \leq 3$

\therefore MÁXIMO VALOR DE λ : 9

(11) DE LA ECUACIÓN

$$2x^5 - 10x^4 + ax^3 - bx^2 + 10x - 2 = 0$$

SI TODAS SUS RAÍCES SON POSITIVAS

\Rightarrow APLICANDO CARDANO-VIETE,

SE CONCLUYE POR EL MOMENTO

QUE: $a > 0$ y $b > 0$

ASUMIENDO QUE LA ECUACIÓN ES

RECÍPROCA $\Rightarrow a = b$

OSEA QUE LA ECUACIÓN QUEDA SI:

$$2x^5 - 10x^4 + ax^3 - ax^2 + 10x - 2 = 0$$

OBSERVESE, ESTA ADMITE RAÍZ:

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x=1 & 2 & -10 & a & -a & 10 & -2 \\ & \downarrow & 2 & -8 & a-8 & -8 & 2 \\ & & 2 & -8 & (a-8) & -8 & 2 & 0 \end{array}$$

\Rightarrow SUS OTRAS 4 RAÍCES LAS HALLAMOS DE

$$2x^4 - 8x^3 + (a-8)x^2 - 8x + 2 = 0$$

DE AQUÍ, $a-8 > 0 \rightarrow a > 8$

ASUMIENDO $a=20$, SE TIENE:

$$2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$\div 2 \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

CONOCIDO

$$\Rightarrow (x-1)^4 = 0 \rightarrow x = 1$$

RAÍZ CUADRUPLE

CS: C.S. = {1}

$\therefore n(C.S.) = 1$

(12) TENGAMOS EN CUENTA QUE:

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

HAGAMOS:

(I)

$$E = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}}$$

EN (I), PARA $n=2; 3; 4; \dots; 80$, SE TIENE:

$$\cdot 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\cdot 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\cdot 2(\sqrt{5} - \sqrt{4}) < \frac{1}{\sqrt{4}} < 2(\sqrt{4} - \sqrt{3})$$

$$\cdot 2(\sqrt{81} - \sqrt{80}) < \frac{1}{\sqrt{80}} < 2(\sqrt{80} - \sqrt{79})$$

Sumando las desigualdades:

$$2(\sqrt{81}-\sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}} < 2(\sqrt{80}-1)$$

Sumando 1 a toda la desigualdad:

$$2(\sqrt{81}-\sqrt{2})+1 < E < 2(\sqrt{80}-1)+1$$

$$16,18 < E < 16,68$$

$$\therefore [E] = 16$$

(13) DE LA ECUACIÓN:

$$2\cos^2\left(\frac{x^2+x}{6}\right) = 2^x + \frac{1}{2^x}$$

Se sabe $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\hookrightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

DE LA ECUACIÓN:

$$2\cos^2\left(\frac{x^2+x}{6}\right) \geq 2$$

DE AQUÍ:

$$\cos\left(\frac{x^2+x}{6}\right) \leq -1 \vee \cos\left(\frac{x^2+x}{6}\right) \geq 1$$

DADE LA ÚNICA POSIBILIDAD QUE

$$\text{CABE ES: } \cos\left(\frac{x^2+x}{6}\right) = 1$$

$$\text{OJO: } -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\text{LUEGO: } \frac{x^2+x}{6} = 0 \rightarrow x(x+1) = 0$$

$$\text{DADE } x=0 \vee x=-1$$

(NO VERIFICA)

$$\therefore \text{C.S.} = \{0\}$$

(14) DE $x^2+4x\cos(xy)+4=0$,

PARA QUE $x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \Delta \geq 0$

$$\text{O SEA: } [4\cos(xy)]^2 - 4(1)(4) \geq 0$$

$$\rightarrow 16[\cos(xy)]^2 \geq 16 \rightarrow \cos^2(xy) \geq 1$$

$$\text{DE AQUÍ: } \cos(xy) \leq -1 \vee \cos(xy) \geq 1$$

PERO POR TRIGONOMETRÍA, SE SABE

$$\text{QUE: } -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

DE LO ANTERIOR, LA ÚNICA POSIBILIDAD QUE CABE ES:

$$\cos(xy) = 1 \vee \cos(xy) = -1$$

REEMPLAZANDO EN LA ECUACIÓN ORIGINAL:

$$\bullet \text{ Si } \cos(xy) = 1 \rightarrow x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$\text{O.S. } x = -2$$

$$\bullet \text{ Si } \cos(xy) = -1 \rightarrow x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$\text{O.S. } x = 2$$

FINALMENTE:

$$\text{C.S.} = \{-2; 2\}$$

(15) OBSERVACIÓN

DEBE DECIR:

HALE EL MÁXIMO VALOR DE $x_1 x_2 x_3 x_4$

DE LA ECUACIÓN

$$x^4+4x^3+ax^2+bx+c=0$$

$$\text{C.S.} = \{x_1; x_2; x_3; x_4\} \in \mathbb{R}$$

\hookrightarrow E VERIFICA QUE $M_A \geq M_G$

$$\bullet \text{ DE } x_1^8; x_2^8; x_3^8; x_4^8$$

$$\hookrightarrow \frac{x_1^8+x_2^8+x_3^8+x_4^8}{4} \geq \sqrt[4]{x_1^8 x_2^8 x_3^8 x_4^8}$$

REEMPLAZANDO VALOR:

$$\sqrt[4]{(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2)} \leq \frac{x}{x}$$

$$(x_1 x_2 x_3 x_4)^2 \leq 1$$

DE AQUÍ:

$$-1 \leq x_1 x_2 x_3 x_4 \leq 1$$

$$\therefore \text{MÁXIMO VALOR DE } x_1 x_2 x_3 x_4 : 1$$

16) Sea $b(x+y) = x^3 + y^3 \dots (1)$

$$a = x+y \dots (2)$$

DE (1): $b(x+y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$\Rightarrow b = (x+y)^2 - 3xy$$

$$b = a^2 - 3xy$$

DE DONDE: $xy = \frac{a^2 - b}{3} \dots (3)$

DE (2) y (3) FORMAMOS UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA, QUE ADMITE POR RAÍCES A X e Y; ÉSTA ES:

$$t^2 - (a)t + \left(\frac{a^2 - b}{3}\right) = 0$$

$$\text{ó } 3t^2 - 3at + (a^2 - b) = 0$$

DE AQUÍ: $t = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4(3)(a^2 - b)}}{6}$

COMO $x, y \in \mathbb{R} \rightarrow t \in \mathbb{R}$

PARA ESTO: $\Delta \geq 0$

$$\Delta = 9a^2 - 12a^2 + 12b \geq 0$$

$$12b \geq 3a^2$$

$$\therefore 4b \geq a^2$$

INECUACIONES

XIV

CAPITULO

Algebra

01) DE $\frac{x}{2} - \frac{1-3x}{2} \leq \frac{x+1}{4x}; x < -\frac{1}{2}$
 Ju C.S. = $-\infty; -\frac{2}{3}] \rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$

• MULTIPLICAMOS LA INECUACIÓN POR $4x$ ($4x$ ES NEGATIVO):

$\rightarrow 4x - 2x(1-3x) \geq x+1$

DE AQUÍ: $4x + 6x - x \geq 2x + 1$

$3x(2x+1) \geq 2x+1 \dots (x)$

PERO $x < -\frac{1}{2} \rightarrow 2x+1 < 0$

• $(x) \div (2x+1): 3x \leq 1 \rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \therefore x = -\frac{1}{3}$

02) K SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ:

$K = \frac{x}{x^2-3x+4} = \frac{1}{\frac{x^2-3x+4}{x}}$

DESDOBLANDO: $K = \frac{1}{x-3+\frac{4}{x}}$

AHORA, FORMEMOS K SABIEENDO QUE $x > 0$ (DATO):

SE SABE QUE: $(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})^2 \geq 0, \forall x > 0$

$\rightarrow x - 4 + \frac{4}{x} \geq 0$

• SUMO 1: $x - 3 + \frac{4}{x} \geq 1$

• INVIERTO: $0 < \frac{1}{x-3+\frac{4}{x}} \leq 1$
 $\therefore 0 < K \leq 1$

03) DE (1) $+6x - x^2 \leq M$

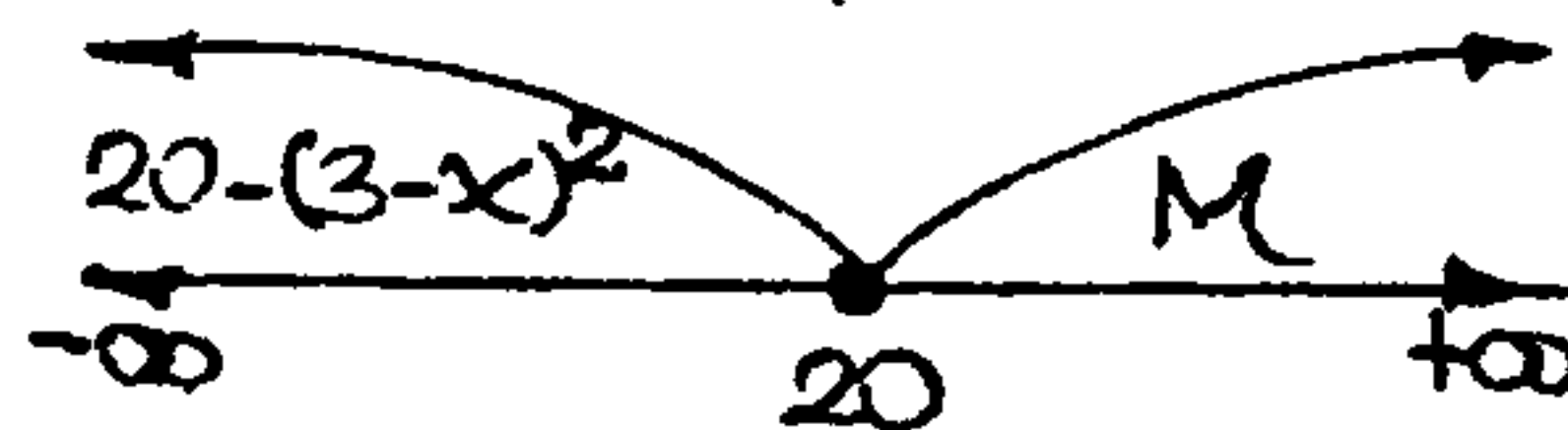
COMPLETAMOS CUADRADOS EN EL 1º MIEMBRO:

$20 - 9 + 6x - x^2 \leq M$

$20 - (3-x)^2 \leq M$

¡OJO! EL MAYOR VALOR DE ESTA EXPRESIÓN ES 20, CUANDO $(3-x)^2 = 0$

Si GRAFICAMOS TENEMOS:



Obs: MEJOR "M": 20

04) DE LA INECUACIÓN:

$\frac{ax+1}{bx+1} - \frac{x+a}{x+b} \geq 0$

$\frac{ax^2+x+bx+1-bx^2-ax-x-a}{(bx+1)(x+b)} \geq 0$

$\frac{x^2(b-a)-(a-b)}{(bx+1)(x+b)} \geq 0$

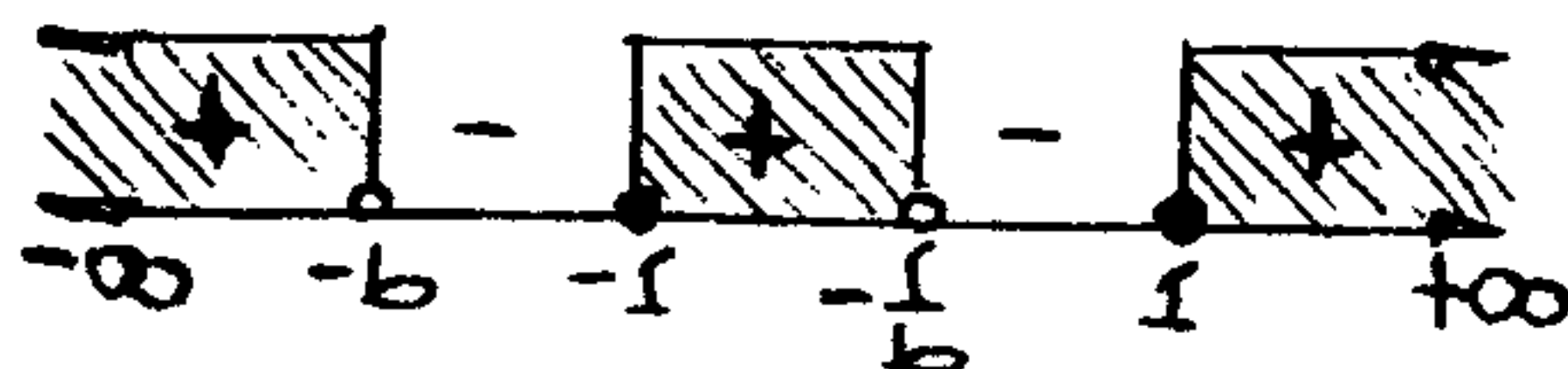
$\frac{(b-a)(x^2-1)}{(bx+1)(x+b)} \geq 0 \dots (I)$

COMO $a > b$ (DADO) $\rightarrow a - b > 0$

• DIVIDO (I) POR $(a - b)$:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(bx+1)(x+b)} \geq 0$$

POR PUNTOS CRÍTICOS (USAMOS $b > 1$):



$$C.S. = (-\infty; -b) \cup [1; -\frac{1}{b}] \cup [1; +\infty)$$

05) OBS: A ESTÁ FORMADO POR ELEMENTOS DE LA FORMA $3x-1$, DONDE $2 < \frac{x-2}{x+1} < 4 \dots (\alpha)$

DE (α) , HALLEMOS $3x-1$ (ELEMENTOS DE A).

• SE PUEDE ESCRIBIR:

$$2 < \frac{(x+1)-3}{x+1} < 4 \rightarrow 2 < 1 - \frac{3}{x+1} < 4$$

• RESTO 1: $1 < -\frac{3}{x+1} < 3$

• INVIERTO: $\frac{1}{3} < -\frac{x+1}{3} < 1$

• POR -9: $-9 < 3x+3 < -3$

• RESTO 4: $-13 < 3x-1 < -7$

OJEA QUE LOS ELEMENTOS DE A ESTÁN ENTRE -13 y -7

$\rightarrow A = (-13; -7) \equiv (a; b)$

OBS: $a = -13 \wedge b = -7$
 $\therefore a+b = -20$

06) DE $(x^2-x+6)(x^2-x-6)(x-1)^2(x+4)^6 \leq 0$

OBS: $f(x^2-x+6) \in (+), \forall x \in \mathbb{R}$

DADO g' : $1 > 0 \wedge \Delta = -23 < 0$

$f(x^2-x-6) \equiv (x-3)(x+2)$

EN LA INECUACIÓN:

$(x^2-x+6)(x-3)(x+2)(x-1)^2(x+4)^6 \leq 0$

DIVIDIMOS POR $(x^2-x+6)(x-1)^2(x+4)^6$; NOS QUEDARÁ:

$(x-3)(x+2) \leq 0$ ¡OJO! $x=1; -4$

EN SOLUCIONES

DE AQUÍ: $-2 \leq x \leq 3$

$\therefore C.S. = [-2; 3] \cup \{-4\}$

07) DE $2x^2+(m-4)x+4=0$

$x_{1;2} = \frac{4-m \pm \sqrt{m^2-16}}{4}$

CONDICIÓN: $-3 < x_1; x_2 < 4$

CASO (I): $-3 < \frac{4-m + \sqrt{m^2-16}}{4} < 4$

DESDOBLANDO y DESPEJANDO:

$\sqrt{m^2-16} > m-16 \wedge \sqrt{m^2-16} < m+12$
 (i) (ii)

DE (i): $m-16 \geq 0 \wedge m^2-16 > (m-16)^2 \dots$
 (α)

$m-16 < 0 \wedge m^2-16 \geq 0 \dots (\beta)$

DE (α): $m \geq 16 \wedge m > \frac{17}{2} \rightarrow m \geq 16 \quad S_\alpha$

DE (β): $m < 16 \wedge (m \leq -4 \vee m \geq 4)$
 $\rightarrow m \leq -4 \vee 4 \leq m < 16 \quad S_\beta$

LUEGO: $S_i = S_\alpha \cup S_\beta$

$\therefore S_i = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

DE (ii):

$m+12 > 0 \wedge m^2-16 \geq 0 \wedge m^2-16 < (m+12)^2$
 $m > -12 \wedge (m \leq -4 \vee m \geq 4) \wedge m > -\frac{20}{3}$

$\diamond -\frac{20}{3} < m < -4 \vee m \geq 4$ \times Si
 LUEGO: $S_I = S \cap S_{II}$
 $\cap S_I = < -\frac{20}{3}; -4] \cup [4; +\infty)$
 CASO II: $-3 < \frac{4-m-\sqrt{m^2-16}}{4} < 4$
 RESOLVIENDO (SIMILAR AL CASO ANTERIOR), SE OBTIENE:
 $S_{II} = < -\infty; -4] \cup [4; 17/2)$
 FINALMENTE: C.S. = $S_I \cap S_{II}$
 $\therefore C.S. = < -\frac{20}{3}; -4] \cup [4; 17/2)$

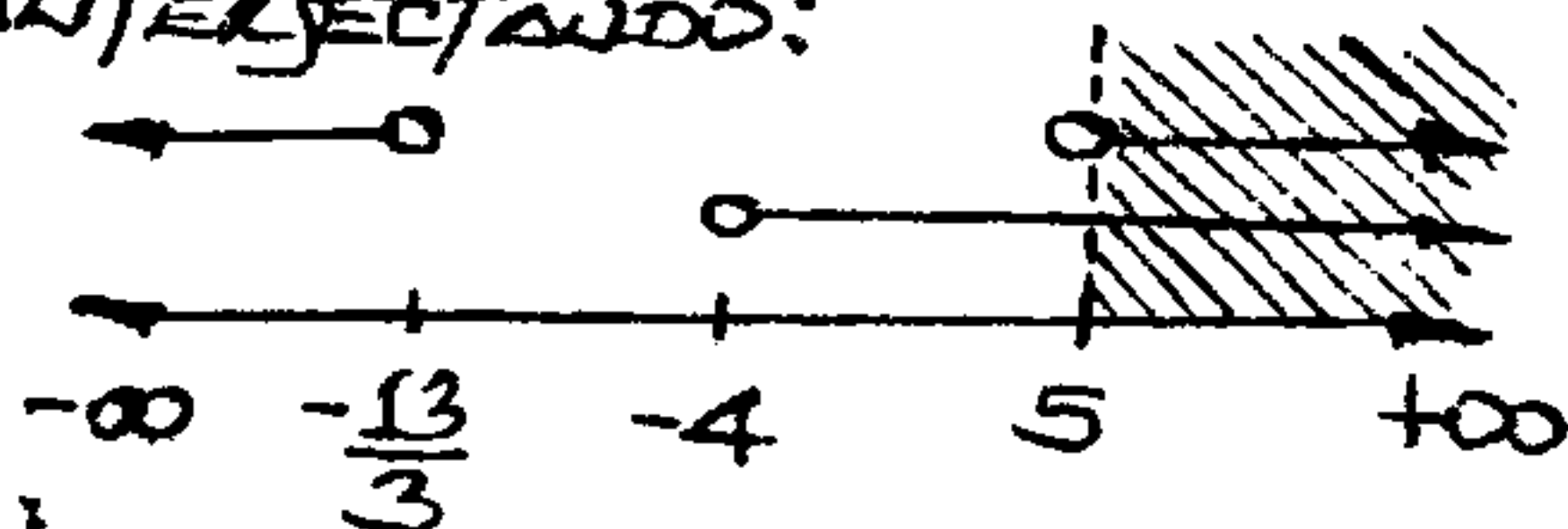
(08) DE $\frac{4+x-4x^2}{x^2-x+1} < m$
 x^2-x+1
 OBS: $(x^2-x+1) \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$; DA-
 DO δ' : $1 > 0 \wedge \Delta = -3 < 0$
 $\diamond 4+x-4x^2 < mx^2-mx+m$
 $\rightarrow (m+4)x^2-(m+1)x+(m-4) > 0$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$

RECUERDE

EL TRINOMIO $y = ax^2 + bx + c$ SERÁ POSITIVO $\forall x \in \mathbb{R}$, SIEMPRE QUE: $a > 0 \wedge \Delta < 0$

EN EL PROBLEMA:
 $m+4 > 0 \wedge [-(m+1)]^2 - 4(m+4)(m-4) < 0$
 $m > -4 \wedge m^2 + 2m + 1 - 4m^2 + 64 < 0$
 $m > -4 \wedge 3m^2 - 2m - 65 > 0$
 $m > -4 \wedge (3m+13)(m-5) > 0$
 $(m > -4) \wedge (m < -\frac{13}{3} \vee m > 5)$

INTERSECTANDO:



OBS: $m > 5$ ó $m \in < 5; +\infty)$

(09) RECUERDE

DADO x_1 y x_2 RAÍCES REALES
 Y DIFERENTES ($x_1 < x_2$) DE LA
 ECUACIÓN $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$,
 $a \neq 0$, SE TIENE:

$$x_1 < h < x_2 \iff a \cdot f(h) < 0$$

EN EL PROBLEMA:

$$f(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + 3(a-1) = 0$$

$$\text{DONDE: } x_1 < a-3 < x_2$$

POR EL RECUERDE ANTERIOR, SE
 DEBE CUMPLIR: $3 \cdot f(a-3) < 0$

$$\text{O TAMBIÉN: } f(a-3) < 0$$

$$\diamond 3(a-3)^2 - 2(a+2)(a-3) + 3(a-1) < 0$$

$$3a^2 - 18a + 27 - 2a^2 + 2a + 12 + 3a - 3 < 0$$

$$a^2 - 13a + 36 < 0 \rightarrow (a-4)(a-9) < 0$$

$$\text{DE DONDE: } 4 < a < 9$$

$$\text{COMO } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 5; 6; 7; 8$$

$$\therefore a \text{ TOMA 4 VALORES ENTEROS}$$

(10) TÉNGASE EN CUENTA EL RECUERDE DE LA RESOLUCIÓN (8).

$$\text{PARA } \delta' \text{ (E-1)} x^2 - 2(1-a)x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\diamond x^2 - 1 > 0 \wedge 4(1-a)^2 - 4(1-1)(1) < 0$$

$$x^2 > 1 \wedge (a-1)^2 - (a+1)(a-1) < 0$$

$$(a-1 \vee a > 1) \wedge (a-1)(a-1-a-1) < 0$$

$$(\theta - 1 \vee \theta > 1) \wedge (\theta - 1 > 0)$$

$$(\theta - 1 \vee \theta > 1) \wedge (\theta > 1)$$

INTERSECTANDO: $\theta > 1$

¡OJO! LOS COEFICIENTES DE x^2 y x TIENEN FACTOR $(\theta - 1)$, y CUANDO $\theta = 1$, SE TIENE: $0x^2 - 0x + 1 > 0$ OSEA, $1 > 0$

¡ESTA ES UNA DESIGUALDAD ABSOLUTA QUE TAMBIÉN SE VERIFICA $\forall x \in \mathbb{R}$!

$$\Rightarrow \theta > 1 \vee \theta = 1$$

$$\therefore \theta \in [1; +\infty)$$

11) DE $\frac{1}{x} < \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x-2}$

DESDOBLANDO:

$$\frac{1}{x} < \frac{x}{x^2+1} \quad \wedge \quad \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x-2}$$

(1) (2)

DE (1): $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} < 0 \rightarrow \frac{1}{x(x^2+1)} < 0$

INVIERTO: $x(x^2+1) < 0 \Rightarrow x < 0$ S_1
ES (+)

DE (2): $\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2+1} \geq 0 \rightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)} \geq 0$
ES (+)

DE AQUÍ:

$$\frac{2x+1}{x-2} \geq 0 \rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x > 2$$
 S_2

LUEGO: C.S. = $S_1 \cap S_2$

$$\therefore \text{C.S.} = (-\infty; -\frac{1}{2}]$$

12) DE LA INECUACIÓN

$$2x^2 - 2mx - n < 0$$

Si C.S. = $(-3; 5) \Rightarrow -3 < x < 5$,

ESTO SE OBTIENE DE RESOLVER

$$(x+3)(x-5) < 0 \text{ ó } x^2 - 2x - 15 < 0$$

o TAMBIÉN $2x^2 - 4x - 30 < 0$
(POR 2)

IDENTIFICANDO CON LA INECUACIÓN DADA:

$$-2m = -4 \quad \wedge \quad -n = -30$$

$$m = 2 \quad \wedge \quad n = 30$$

$$\therefore mn = 60$$

13) FORMEMOS $6x - x^2$ CUANDO $x \in [0; 8]$ OSEA $0 \leq x \leq 8$

• RESTO 3: $-3 \leq x-3 \leq 5$

• AL \square : $0 \leq (x-3)^2 \leq 25$

$$0 \leq x^2 - 6x + 9 \leq 25$$

• RESTO 9: $-9 \leq x^2 - 6x \leq 16$

• POR -1: $-16 \leq 6x - x^2 \leq 9$

$\Rightarrow (6x - x^2) \in [-16; 9] \equiv [a; b]$ (DATO)

OBS: $a = -16 \wedge b = 9$

LA INECUACIÓN A RESOLVER SE

PUEDE ESCRIBIR:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-b)^2} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+16)(x-9)}{(x-9)^2} \leq 0$$

DE AQUÍ, QUEDA: $\frac{x+16}{x-9} \leq 0; x \neq 9$

DADE: $-16 \leq x < 9 \therefore \text{C.S.} = [-16; 9)$

14) $(x+1)^2 + (x+3)x < \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - 2$
LEGEINDE

$$x^2 + 2x + 1 + 2x + 3x < 4x \left(\frac{3}{4}\right) - 2$$

$$\leadsto x^2 + 2x + 1 + 2x + 3x < 3x - 2$$

$$x^2 + (2+2)x + (2+1) < 0$$

$$(x+2+1)(x+1) < 0 \dots (I)$$

Ptos. críticos: $-(2+1)$ y -1

COMO $2 < -3 \Rightarrow -(2+1)$ ES (+).

DE (I): $-1 < x < -(2+1)$

ESTO ES ENTERO

(POR DATO, $2 \in \mathbb{Z}$)

Obs: los valores enteros que puede

tomar x son: $0; 1; 2; \dots; -(2+2)$

$(-2-1)$ VALORES

(15) Sea $y = (xy + xz + yz)^2 - 2(x+y+z) + 9$

DESARROLLANDO: 1 (DATO)

$$y = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2xyz(x+y+z) - 2(x+y+z) + 9$$

CANCELANDO: $y = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 9$

AHORAS, SABEMOS Q': $M_A \geq M_G$

$$\hookrightarrow \frac{(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2}{3} \geq \sqrt[3]{(xy)^2(xz)^2(yz)^2}$$

$$(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 \geq 3 \sqrt[3]{(xyz)^4}$$

\hookrightarrow VALE 1 (DATO)

$$\hookrightarrow (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 \geq 3$$

SUMO 9: $(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 9 \geq 12$

ESTO ES y

$$\hookrightarrow y \geq 12 \therefore y_{\min} = 12$$

(16) SIMILAR A LA RESOLUCIÓN (12)
(REVISE)

DADO $P(x) = x^2 + \alpha^2 x + \beta^2$, LUEGO

DE $x^2 + \alpha^2 x + \beta^2 < 0$,

SU C.S. = $\langle \alpha; \beta \rangle$ SE OBTUVO DE

RESOLVER $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$

Ó $x^2 - (\alpha+\beta)x + (\alpha\beta) < 0$

IDENTIFICANDO CON LA INECUACIÓN

DADA: $\alpha^2 = -(\alpha+\beta)$ 1 $\beta^2 = \alpha\beta$

(1)

(2)

DE (2): $\beta = \alpha$; EN (1): $\alpha^2 = -2\alpha$

$\rightarrow \alpha = -2 = \beta$, CON ESTO, SE TIENE:

C.S. = $\langle -2; -2 \rangle \Rightarrow$ C.S. = \emptyset

\hookrightarrow (I) ES V

Obs: $P(x) = x^2 + 4x + 4$

$$\leadsto P(x) = (x+2)^2$$

VEAMOS QUE $P(x) \geq 0$

" $P(x)$ ES NO NEGATIVO"

¡OJO! NO ES LO MISMO DECIR,

NO NEGATIVO Y SIEMPRE POSITIVO

\hookrightarrow (II) ES F

(*) Obs: $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

\hookrightarrow (III) ES F

\therefore VFF

(17) CORRECCIÓN

DEBE DECIR:

$$a < \frac{x+b}{x+b} < b; a \neq b, a > 1$$

HALLE, SI $x \in (a-2b; -\frac{4}{3})$

DE LA INECUACIÓN: $a < \frac{x+b}{x+b} < b$

Obs: $a < b \hookrightarrow 1 < a < b$

TRANSFORMADO LA INECUACIÓN:

$$a < \frac{(x+b)+(a-b)}{x+b} < b$$

• DE DOBLO: $a < 1 + \frac{a-b}{x+b} < b$

• RESTO 1: $\underbrace{a-1}_{\in \mathbb{R}^+} < \frac{a-b}{x+b} < \underbrace{b-1}_{\in \mathbb{R}^+}$

• INVIERTO: $\frac{1}{b-1} < \frac{x+b}{a-b} < \frac{1}{a-1}$

• MULTIPLICO POR (a-b)

OJO: $a-b \in \mathbb{R}^+$, DADO $a < b$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a-1} < x+b < \frac{a-b}{b-1}$$

• RESTO b: $\frac{a-b}{a-1} - b < x < \frac{a-b}{b-1} - b$

COMPARANDO CON EL DATO:

$$\neq \frac{a-b}{a-1} - b = a - 2b \rightarrow \frac{a-b}{a-1} = a$$

$$\rightarrow a-1=1 \rightarrow a=2$$

$$\neq \frac{a-b}{b-1} - b = -\frac{14}{3} \rightarrow \frac{2-b}{b-1} - b = -\frac{14}{3}$$

DE AQUÍ: $3b^2 - 14b + 8 = 0$

$$(3b-2)(b-4) = 0$$

Obs: $b = \frac{2}{3}$; $b = 4$ ($b > 0$)

$$\therefore a+b = 2+4 = 6$$

18) $x^2 \sqrt{x-a} > |ax-x^2|$; $1 \leq a < 5$
 $|x^2-ax|$

Obs: $x-a > 0$; OJO: $x=a$ NO VERIFICA!

DE AQUÍ: $x > a \Rightarrow \underline{x > 5}$

Obs: $|x-a| = x-a \wedge |x| = x$

DE LA INECUACIÓN:

$$x^2 \sqrt{x-a} > |x||x-a|$$

$$\Rightarrow x^2 \sqrt{x-a} > x(x-a)$$

• AL \square : $x^2 \sqrt{x-a} > (x-a)^2$

$$\rightarrow x^2 > x-a \rightarrow x^2 - x + a > 0 \dots (I)$$

DE AQUÍ: $\Delta = 1-4a$

Y COMO $1 \leq a < 5 \Rightarrow \Delta < 0$

LUEGO, LA INECUACIÓN (I), SE VERIFICA $\forall x \in \mathbb{R}$.

INTERSECTANDO CON $x > 5$, SE TIENE: $x > 5$

\therefore MÍNIMO VALOR ENTERO DE x : 5

19) RECUERDE

SI $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p \in \mathbb{R}^+$ \wedge $n \in \mathbb{N}$ ENTONCES:

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_p^n}{p} \geq \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{p} \right]^n$$

APLIQUEMOS EN EL PROBLEMA:

DATO: $F(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$

$$\wedge x+y+z=12$$

LUEGO:

$$\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}{3} \geq \left[\frac{(x-1) + (y-2) + (z-3)}{3} \right]^2$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \geq 3 \left[\frac{x+y+z-6}{3} \right]^2$$

$$F(x,y,z) \geq 3 \left[\frac{12-6}{3} \right]^2$$

DE AQUÍ: $F(x,y,z) \geq 12$

\therefore MÍNIMO VALOR DE $F(x,y,z)$ ES: 12

20) $x \in [-5; 2] \wedge |x^2 - 9| \leq k$

Obs: $-5 \leq x \leq 2$

• AL \square : $0 \leq x^2 \leq 25$

• RESTO 9: $-9 \leq x^2 - 9 \leq 16$

O TAMBIÉN:

$$-16 \leq -9 \leq x^2 - 9 \leq 16$$

$$\Rightarrow |x^2 - 9| \leq 16$$

\therefore MÍNIMO VALOR DE k : 16

21) NOTA

AGREGAMOS ≥ 0 PARA QUE NO APAREZCA 2 ALTERNATIVAS CORRECTAS

DE $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-\alpha)^6(x^2+\alpha x+\alpha^2)} \leq 0 \dots (I)$

Por dato: C.S. = $[2; 5] - \{3\}$

Obs: $\alpha \neq 0$, porque $\alpha = 0$ NO DARÍA LUGAR AL C.S. DADO.

Obs: $(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$ es (+), $\forall x \in \mathbb{R}$

Obs: $(x-\alpha)^6$ es (+), $\forall x \in \mathbb{R}$; $x \neq \alpha$

• MULTIPLICAMOS (I) POR LA EXPRESIÓN

$(x-\alpha)^6(x^2+\alpha x+\alpha^2)$; NO QUEDA:

$\hookrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0$; $x \neq \alpha$ (II)

Por dato: $a^2 - ab > 0 \rightarrow a^2 > ab$

• DIVIDO POR a ($a > 0$): $a > b$

DE (II): $b < x < a$; $x \neq \alpha$

\rightarrow C.S. = $[b; a] - \{\alpha\}$

COMPARANDO CON EL DATO:

$a = 5$; $b = 2$ \wedge $\alpha = 3$

$\therefore a^a - b^b = 125 - 8 = 117$

22) $\frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1} + 5 + 4\sqrt{x}} > 4x - 2 - 3x^2$

CALCULEMOS C.V.A.:

$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x+1 \geq 0 \wedge x \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 1 \wedge x \leq 2 \wedge x \leq 3 \wedge x \geq -1 \wedge x \geq 0$

INTERSECTANDO: $0 \leq x \leq 1$

\Rightarrow C.V.A. = $[0; 1]$

CON ESTO, PODEMOS VER QUE $(4x - 2 - 3x^2)$ es NEGATIVO

\Rightarrow CON $0 \leq x \leq 1$, SE TIENE QUE:

$\frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1} + 5 + 4\sqrt{x}} > 4x - 2 - 3x^2$,
es NÚMERO (-)
es NÚMERO (+)

OSEA QUE TODO $x \in$ C.V.A. es SOLUCIÓN DE LA INECUACIÓN DADA.

\therefore C.S. = C.V.A. = $[0; 1]$

23) DE $\sqrt{2x+2} > \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \dots (I)$

¡OJO! DATO $a \in \{2; 4; 8\}$

Obs: $2x+2 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0$

$x \geq -\frac{2}{2} \wedge x \geq 1-2 \wedge x \geq -1$

AGUÍ, PARA CUALQUIER VALOR DE "a" DADO, LA INTERSECCIÓN DE ESTOS es: $x \geq 1$ COND. NEC.

(I)²: $2x+2 > x+2 + 2\sqrt{x+1} + x+1$

$\hookrightarrow 2x+2 > 2x+2 + 2\sqrt{x+1} + x+1$

$$\rightarrow 2\sqrt{x-2+1}\sqrt{x+1} < 0$$

NO ES (-) NO ES (-)

⇒ $\nexists x$ QUE SATISFACE LA INECUACIÓN $\Rightarrow x \in \emptyset$
INTERSECTANDO CON LA CONDICIÓN NECESARIA: C.S. = \emptyset

24) DE $4\sqrt{\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}{6-x}} > 3-x$

CALCULEMOS C.V.A.:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-3} \geq 0 \wedge \sqrt{x+3} \geq 0 \wedge \frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}{6-x} \geq 0 \\ & \underbrace{x \geq 3 \wedge x \geq -3}_{(x)} \end{aligned}$$

$$\underline{x \geq 3} \quad (1)$$

• USEMOS ESTO PARA RESOLVER (x)
CON $x \geq 3$, VEMOS QUE EL NUMERADOR DE (x) SIEMPRE SERÁ NEGATIVO; POR TANTO, PARA QUE LA DESIGUALDAD SE VERIFIQUE, NECESARIAMENTE, SE DEBE CUMPLIR:

$$6-x < 0 \rightarrow \underline{x > 6} \quad (2)$$

INTERSECTANDO (1) y (2):

$$x > 6 \Rightarrow \text{C.V.A.} = \langle 6; +\infty \rangle$$

CON DICHO C.V.A. VEMOS QUE $3-x$ ES NEGATIVO \Rightarrow CON $x > 6$, SE TIENE:

$$\begin{aligned} \text{NE: } & 4\sqrt{\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}{6-x}} > 3-x \\ & \text{ES NÚM. (-)} \\ & \text{ES NÚMERO (+)} \end{aligned}$$

QUEA QUE TODO $x \in$ C.V.A. ES SOLUCIÓN DE LA INECUACIÓN DADA.

$$\therefore \text{C.S.} = \text{C.V.A.} = \underline{\langle 6; +\infty \rangle}$$

25) OBSERVACIÓN

EN EL DENOMINADOR DE LA FRACCIÓN DEBE SER ASÍ:

$$\frac{\dots}{(n+1)x^2 + \dots} < 0$$

$$\text{DE } \frac{(n+1)x^2 + \sqrt{4n^2-5}x + (n-1)}{(n+1)x^2 + n^2x + (n-1)} < 0$$

$$\text{OBS: } (n+1)x^2 + \sqrt{4n^2-5}x + (n-1) \text{ ES (+)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, DADO QUE $(n+1) > 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (\sqrt{4n^2-5})^2 - 4(n+1)(n-1) \\ &= 4n^2-5-4n^2+4 = -1 \end{aligned}$$

QUEA QUE: $\Delta < 0$

⇒ PARA QUE LA INECUACIÓN SE VERIFIQUE SE DEBE CUMPLIR:

$$(n+1)x^2 + n^2x + (n-1) < 0$$

$$(n+1)x \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ n-1 \end{array}$$

$$\rightarrow [(n+1)x+1](x+n-1) < 0 \dots (I)$$

$$\text{PUNTOS CRÍTICOS: } -\frac{1}{n+1} \wedge 1-n$$

OBS: COMO $n > 2$ (DATO)

$$\Rightarrow \text{ES OBVIO QUE: } -\frac{1}{n+1} > 1-n$$

$$\text{LUEGO, DE (I): } 1-n < x < -\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \langle 1-n; -\frac{1}{n+1} \rangle$$

26) SI DE LA INECUACIÓN

$$x^2 + 2(2\alpha-3\beta)x + 36m < 0$$

$$\text{SU C.S.} = \langle \alpha^2+4; \beta^2+9 \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha^2+4 < x < \beta^2+9$$

ESTO SE OBTIENE DE RESOLVER:

$$[x-(\alpha^2+4)][x-(\beta^2+9)] < 0$$

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + 13)x + (\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 9) < 0$$

IDENTIFICANDO CON LA INEC. DADA:

$$* 2(2\alpha - 3\beta) = \alpha^2 + \beta^2 + 13 \dots (1)$$

$$* (\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 9) = 36m \dots (2)$$

$$\text{DE (1): } 4\alpha - 6\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 9 + 4$$

$$\rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 6\beta + 9 = 0$$

$$(\alpha - 2)^2 + (\beta + 3)^2 = 0$$

COMO α y $\beta \in \mathbb{R}$, ENTONCES,
ÚNICA POSIBILIDAD, ES:

$$\alpha = 2 \wedge \beta = -3$$

$$\cdot \text{EN (2): } (8)(18) = 36m \rightarrow m = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta + m = 3$$

$$(27) \text{ SEA } y = \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} \Rightarrow y > 0$$

$$\text{OBS: } x-2 > 0 \wedge 3-x > 0$$

$$x > 2 \wedge x < 3,$$

$$2 < x < 3 \text{ COND. NEC.}$$

$$\text{DE } y: y = \sqrt{(\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x})^2}$$

DESARROLLANDO:

$$y = \sqrt{1 + 2\sqrt{(x-2)(3-x)}}$$

$$y = \sqrt{1 + 2\sqrt{-(x^2 - 5x + 6)}}$$

DE LA CONDICIÓN: $2 < x < 3$

$$\cdot \text{RESTO } \frac{5}{2}: -\frac{1}{2} \leq x - \frac{5}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\cdot \text{AL } \square: 0 \leq x^2 - 5x + \frac{25}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\cdot \text{RESTO } \frac{1}{4}: -\frac{1}{4} \leq x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$$\cdot \text{POR } -1: 0 \leq -(x^2 - 5x + 6) \leq \frac{1}{4}$$

$$\cdot \text{SACO } \sqrt{}: 0 \leq \sqrt{-(x^2 - 5x + 6)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\cdot \text{POR } 2: 0 \leq 2\sqrt{-(x^2 - 5x + 6)} \leq 1$$

$$\cdot \text{SUMO } 1: 1 \leq 1 + 2\sqrt{-(x^2 - 5x + 6)} \leq 2$$

• SACAMOS RAÍZ CUADRADA:

$$1 \leq \underbrace{1 + 2\sqrt{-(x^2 - 5x + 6)}}_y \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore y \text{ VARÍA EN: } [1; \sqrt{2}]$$

$$(28) \text{ DATO: } a_{n+1} = a_n + 1$$

$$\rightarrow a_{n+1} - a_n = 1 \quad (a_{n+1} > a_n)$$

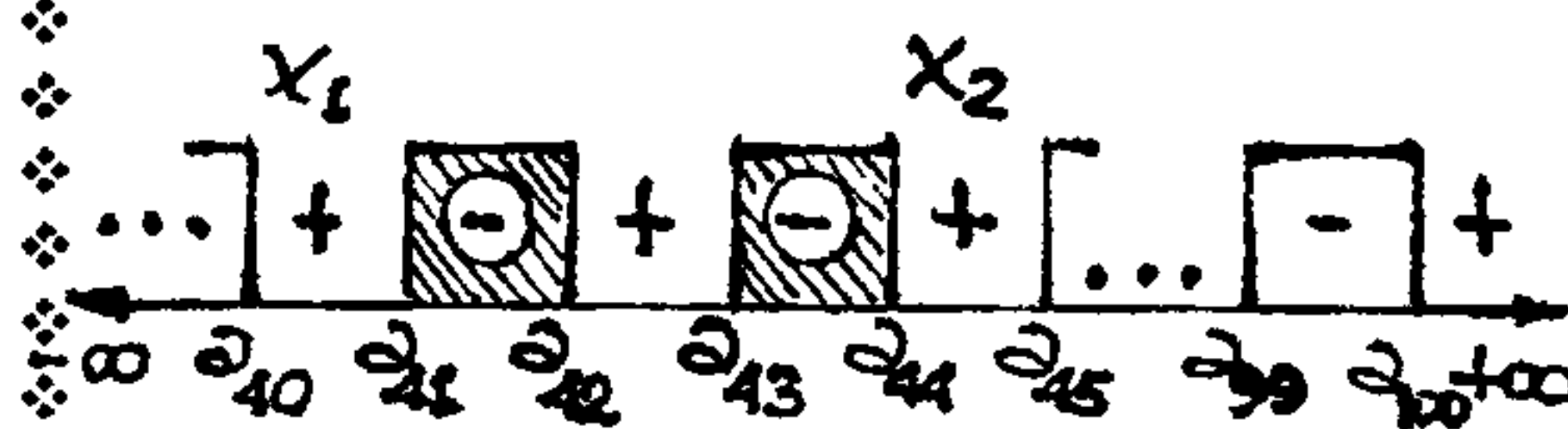
SE DIFERENCIA EN 1

DE LA INECUACIÓN:

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_{100}) < 0$$

$$\text{PTOS. CRÍTICOS: } \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{100}\}$$

GRAFICANDO:



DE AQUÍ, LA SOLUCIÓN DE LA INECUACIÓN VIENE DADO POR LA UNIÓN DE TODOS LOS INTERVALOS CON SIGNO (-).

PERO POR DATO: $x_1 \leq x \leq x_2$

$$\Rightarrow a_{41} < x < a_{42} \vee a_{43} < x < a_{44}$$

$$\therefore \text{C.S.} = (a_{41}; a_{42}) \cup (a_{43}; a_{44})$$

VALOR ABSOLUTO

XV

CAPITULO

Algebra

01 (*) POR DEFINICIÓN:

(i) $|x| = x$; si $x \geq 0$

$\rightarrow |x||x| = x \cdot x$ ó $x^2 = |x|^2$

• SACO $\sqrt{}$: $\sqrt{x^2} = |x|$

(ii) $|x| = -x$; si $x < 0$

$\rightarrow |x||x| = (-x)(-x)$ ó $x^2 = |x|^2$

• SACO $\sqrt{}$: $\sqrt{x^2} = |x|$

DE (i) y (ii): $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

⇒ (I) ES V

(**) SEA $a = \frac{x}{y} \rightarrow ay = x$

TOMAMOS VALOR ABSOLUTO:

$|ay| = |x| \rightarrow |a||y| = |x|$

$\rightarrow |a| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$

REPONIENDO "a": $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$

⇒ (II) ES V

(***) SE SABE QUE $|xy| = |x||y|$

$\rightarrow |xy| = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\therefore \sqrt{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}}$ ⇒ (III) ES V

02 DE $|a-b| + |x+y| = 0$

Obs: $|a-b| \geq 0$ ($|a-b|$ NUNCA ES NEGATIVO)

$|x+y| \geq 0$ ($|x+y|$ NUNCA ES NEGATIVO)

⇒ LA ÚNICA POSIBILIDAD PARA QUE LA SUMA VALGA 0, ES QUE CADA SUMANDO DEBE VALER 0.

⇒ $|a-b| = 0, \wedge |x+y| = 0,$

$a = b \wedge x = -y$

$\therefore \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = 1 + (-1) = 0$

03 * DE $|x-a| < \epsilon \rightarrow -\epsilon < x-a < \epsilon$

• SUMO a: $a - \epsilon < x < a + \epsilon$

↪ C.S. = $(a - \epsilon; a + \epsilon)$

* DE $|x-b| < \epsilon \rightarrow -\epsilon < x-b < \epsilon$

• SUMO b: $b - \epsilon < x < b + \epsilon$

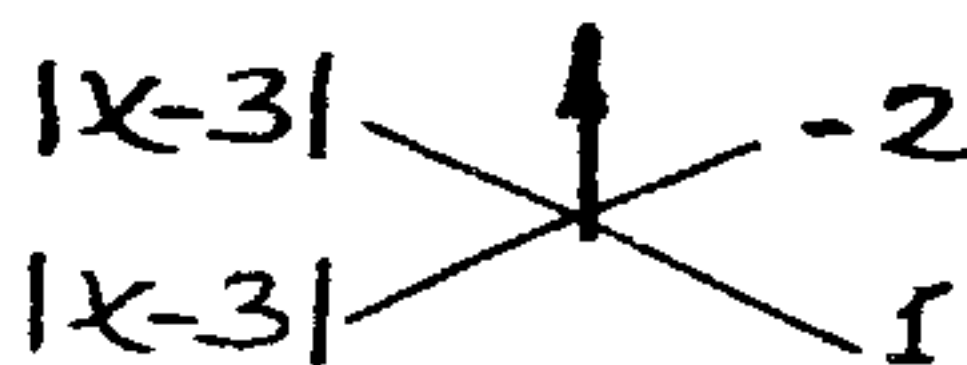
↪ C.S. = $(b - \epsilon; b + \epsilon)$

Obs: AMBOS CONJUNTOS (C.S.) SERÁN IGUALES, SI $a = b$

04 Obs: $(x-3)^2 = |x-3|^2$

→ ESCRIBIMOS LA ECUACIÓN, ASÍ:

$|x-3|^2 - |x-3| - 2 = 0$

$|x-3|$ 

↪ $(|x-3| - 2)(|x-3| + 1) = 0$

ESTO ES ≥ 1

⇒ ÚNICA POSIBILIDAD:

$|x-3| - 2 = 0 \rightarrow |x-3| = 2$

DE AQUÍ: $x-3 = 2 \vee x-3 = -2$
 $x = 5 \vee x = 1$

\therefore C.S. = $\{5; 1\}$

05) LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR:

$$|3(x-2)| + |2(x+3)| = |3(x+3)| + |2(x-2)|$$

$$3|x-2| + 2|x+3| = 3|x+3| + 2|x-2|$$

REDUCIENDO: $|x-2| = |x+3|$

DE AQUÍ: $x-2 = x+3 \vee x-2 = -x-3$

$$-2 = 3$$

$$2x = -1$$

¡ABSURDO!

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

06) DE A: $x^2 > 5$

DE AQUÍ: $x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$

SUMO 1: $x+1 < 1-\sqrt{5} \vee x+1 > 1+\sqrt{5}$

$$\diamond A = \langle -\infty; 1-\sqrt{5} \rangle \cup \langle 1+\sqrt{5}; +\infty \rangle$$

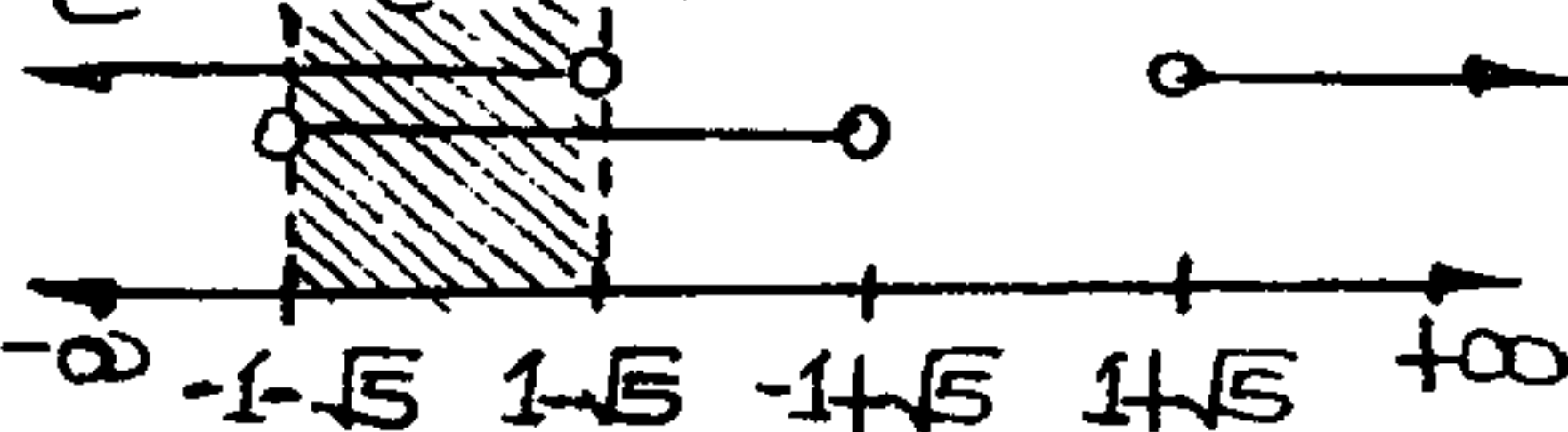
DE B: $x^2 < 5$

DE AQUÍ: $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

RESTO 1: $-1-\sqrt{5} < x-1 < -1+\sqrt{5}$

$$\diamond B = \langle -1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5} \rangle$$

HALEMOS $A \cap B$:



$$\therefore A \cap B = \langle 1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5} \rangle$$

07) DE $\frac{|3x+1|-x}{|2x-1|+x} \leq 0$

ANALICEMOS 2 CASOS:

(1°) $x \geq 0$ ó (2°) $x < 0$

• SI $x \geq 0$, PODEMOS VER QUE EL

DENUMINADOR ES POSITIVO, ENTONCES, SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$|3x+1|-x \leq 0 \rightarrow |3x+1| \leq x \dots (\alpha)$$

RECUERDE

SIENDO $a > 0$, RESOLVER $|x| \leq a$ ES EQUIVALENTE A RESOLVER:

$$-a \leq x \leq a$$

APLICANDO EN (α) :

COMO SE ESTÁ ASUMIENDO Q' $x \geq 0$

$$-x \leq 3x+1 \leq x$$

DESDOBLANDO:

$$-x \leq 3x+1 \wedge 3x+1 \leq x$$

$$x \geq -\frac{1}{4} \wedge x \leq -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{4}$$

INTERSECTANDO ESTO CON $x \geq 0$

SE OBTIENE: C.S.₁ = \emptyset

• SI $x < 0$, PODEMOS VER QUE EL NUMERADOR ES POSITIVO, ENTONCES, SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$|2x-1|+x < 0 \rightarrow |2x-1| < \underbrace{-x}_{\text{ES (+)}}$$

DADO Q' $x < 0$

DE AQUÍ, POR EL RECUERDE

$$x < 2x-1 < -x$$

DESDOBLANDO:

$$x < 2x-1 \wedge 2x-1 < -x$$

$$x > 1 \wedge x < \frac{1}{3}$$

INTERSECCIÓN: \emptyset

LUEGO, AQUÍ: C.S.₂ = \emptyset

$$\therefore \text{C.S.} = \text{C.S.}_1 \cup \text{C.S.}_2 = \emptyset$$

08) CAS: $x^2+10 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow |x^2+10| = x^2+10$

REEMPLAZANDO EN LA INECUACIÓN:

$$(x^2+6)|1-|1-x|| \leq |x^2+8-2|-2|$$

$$(x^2+6)|1-|1-x|| \leq |x^2+8|-2|$$

Similar: $x^2+8 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |x^2+8| = x^2+8$$

EN LA INECUACIÓN:

$$(x^2+6)|1-|1-x|| \leq |x^2+8-2|$$

$$(x^2+6)|1-|1-x|| \leq |x^2+6|$$

$$\rightarrow (x^2+6)|1-|1-x|| \leq (x^2+6)$$

• DIVIDIDO POR $(x^2+6) \rightarrow A(1)$:

$$|1-|1-x|| \leq 1$$

POR EL RECUERDE DE LA RESOLUCIÓN ANTERIOR (7)

$$\neg -1 \leq 1-|1-x| \leq 1$$

• RESTO 1: $-2 \leq -|1-x| \leq 0$

• POR -1: $0 \leq |1-x| \leq 2$

DE AQUÍ: $-2 \leq 1-x \leq 2$

• RESTO 1: $-3 \leq -x \leq 1$

• POR -1: $-1 \leq x \leq 3$

$$\therefore \text{C.S.} = [-1; 3]$$

(09) RECUERDE

DADOS $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\text{Si } |a+b| < |a|+|b| \Rightarrow ab < 0$$

EN EL PROBLEMA:

$$|2x| < |x-1|+|x+1|$$

SE PUEDE ESCRIBIR $(2x = (x-1)(x+1))$

$$\neg |(x-1)+(x+1)| < |x-1|+|x+1|$$

AQUÍ, POR EL RECUERDE, SE DEBE

CUMPLIR: $(x-1)(x+1) < 0$

$$\neg -1 < x < 1$$

y como $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0$

LUEGO: $A = \{0\} \therefore \text{CARD}(A) = 1$

(10) RECUERDE

DESIGUALDAD TRIANGULAR

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, SE CUMPLE:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

EN EL PROBLEMA:

OBJ. $|1-x| = |x-1|$

$$\Rightarrow |2x-1| \leq |x|+|x-1|$$

Si HACEMOS: $x=a \wedge x-1=b$

$$\Rightarrow 2x-1 = a+b$$

\Rightarrow SE TENDRÍA: $|a+b| \leq |a|+|b|$

¡ESTA ES LA DESIGUALDAD TRIANGULAR!

SE VERIFICA $\forall a, b \in \mathbb{R}$

OSEA $\forall x \text{ y } x-1 \in \mathbb{R}$

$$\therefore \text{C.S.} = \mathbb{R}$$

(11) DE A: $|x-1|-2x+1=0$

$$\rightarrow |x-1|-2x+1=0$$

$$\rightarrow |x-1|=2x-1$$

RECUERDE

RESOLVER $|x|=a$, ES EQUIVALENTE A RESOLVER:

$$a \geq 0 \wedge (x=a \vee x=-a)$$

APLICANDO:

$$2x-1 \geq 0 \wedge (x-1=2x-1 \vee x-1=-(2x-1))$$

$$x \geq \frac{1}{2} \wedge (x=0 \vee x=\frac{2}{3})$$

OJO: EL ÚNICO $x \geq \frac{1}{2}$ ES $\frac{2}{3}$

$$\text{LUEGO: } A = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

• DE B: $[(x-1)^2]+2|x-1|+1=0$

$$\leadsto |x-1|^2 + 2|x-1| + 1 = 0$$

$$(|x-1|+1)^2 = 0$$

• SACO $\sqrt{}$: $|x-1|+1=0$

$$\rightarrow |x-1| = -1$$

¡ABSURDO!

"EL VALOR ABSOLUTO DE UN # REAL, SIEMPRE ES MAYOR O IGUAL A 0"

• AQUÍ: $\nexists x \Rightarrow B = \emptyset$

CON ESTO: $B^c = R$

$$\therefore A \cap B^c = \left\{\frac{2}{3}\right\} \cap R = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

⑫ Sea $\frac{1}{x} > \frac{|x|}{1+|x|} \dots (1)$

$$x^2 - 6x + 11 < 3|x-3| \dots (2)$$

• DE (1): $\frac{1}{x} > \frac{|x|}{1+|x|}$

ESTO ES ≥ 0

VEAMOS \emptyset' , PARA QUE ESTA DESIGUALDAD SE VERIFIQUE $\Rightarrow \frac{1}{x} > 0$,

OSEA QUE $\overline{x > 0}$ COND. NEC.

CON ESTO, EN (1): $\frac{1}{x} > \frac{x}{1+x}$

$$\rightarrow 1+x > x^2 \rightarrow x^2 - x - 1 < 0$$

OBJ: LOS RAÍCES DE $x^2 - x - 1 = 0$

$$\text{SON: } x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

• DE LA INECUACIÓN ANTERIOR:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

DE AQUÍ, INTERSECTANDO CON LA CONDICIÓN NECESARIA ($x > 0$), SE TIENE:

$$C.S._1 = \left\langle 0; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$$

• DE (2): DADO QUE ES UN SISTEMA DE ECUACIONES, DONDE SE TIENE \emptyset' INTERSECTAR C.S.₁ CON C.S.₂,
 \Rightarrow SE PUEDE USAR C.S.₁ PARA RESOLVER (2).

ASÍ, DEL C.S.₁: $0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

• RESTO 3: $-3 < x-3 < \frac{\sqrt{5}-5}{2}$
 ES (-)

CON ESTO: $|x-3| = -(x-3) = 3-x$

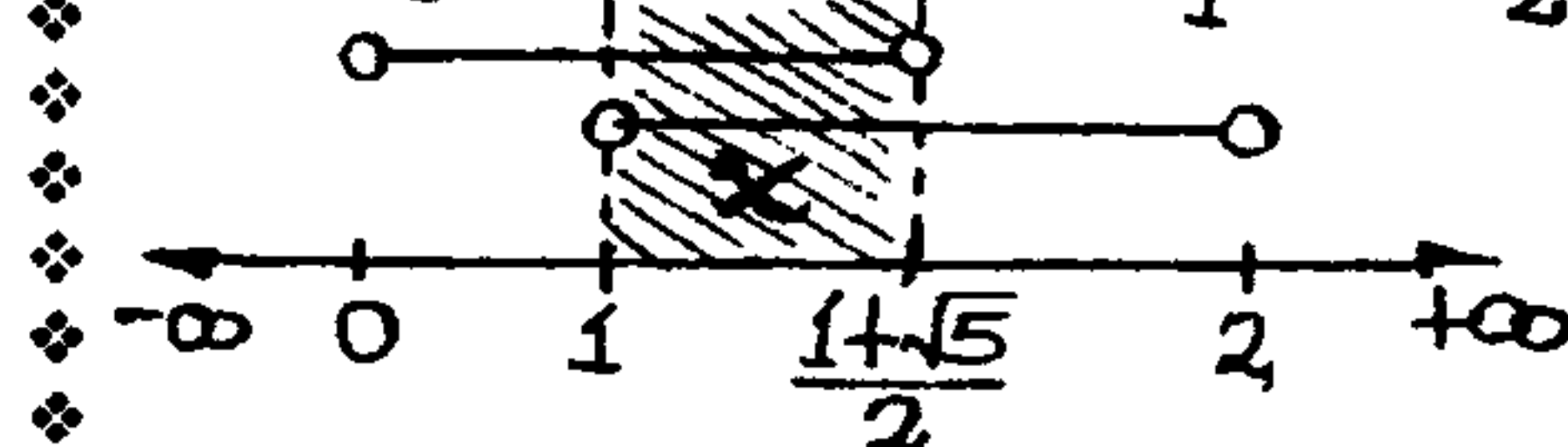
EN (2): $x^2 - 6x + 11 < 3(3-x)$

DE AQUÍ: $x^2 - 3x + 2 < 0$

$$(x-1)(x-2) < 0$$

$$\rightarrow 1 < x < 2 \rightarrow C.S._2 = \langle 1; 2 \rangle$$

FINALMENTE: $C.S. = C.S._1 \cap C.S._2$



$$\therefore C.S. = \left\langle 1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$$

⑬ OBJ: $|3-3x| = |3x-3|$

• $|5x-9| - |3x-3| + x - 21 < 3x - 21$

ESTO ES ≥ 0

NO PUEDE SER (-)

DE AQUÍ: $3x - 21 > 0 \rightarrow x > 7$

COND. NEC.

CON ESTO:

Si $x > 7$: $5x-9 > 26 \rightarrow |5x-9| = 5x-9$
 $3x-3 > 18 \rightarrow |3x-3| = 3x-3$

EN LA INECUACIÓN:

$$|5x-9 - (3x-3) + x - 21| < 3(x-7)$$

$$\leadsto |3x-27| < 3(x-7)$$

$$\rightarrow 3|x-9| < 3(x-7) \rightarrow |x-9| < x-7$$

• ELEVAMOS AL \square ($x > 7$ COND. NEC.)
 $\leadsto (x-9)^2 < (x-7)^2$
 $\rightarrow x^2 - 18x + 81 < x^2 - 14x + 49$
 $\rightarrow 4x > 32 \rightarrow x > 8$
 INTERSECTANDO CON LA COND. NECESARIA ($x > 7$), SE TIENE:
 $x > 8 \therefore C.S. = (8; +\infty)$

14) ESCRIBIMOS:

$||2x-2| - |3-2x|| > \sqrt{2x-5}$
 DE AQUÍ: $2x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{5}{2}$ COND. NEC.
 CON ESTO:
 • Si $x \geq \frac{5}{2}$
 $2x-2 \geq 3 \rightarrow |2x-2| = 2x-2$
 $3-2x \leq -2 \rightarrow |3-2x| = 2x-3$
 EN LA INECUACIÓN:
 $|2x-2 - (2x-3)| > \sqrt{2x-5}$
 DE AQUÍ: $1 > \sqrt{2x-5}$
 • AL \square : $1 > 2x-5 \rightarrow x < 3$
 INTERSECTANDO CON LA COND. NEC. ($x \geq 5/2$), SE TIENE:
 $\frac{5}{2} \leq x < 3$
 $\therefore C.S. = [\frac{5}{2}; 3)$

15) LA INEC. SE PUEDE ESCRIBIR:

$\sqrt{(x-12)^2} - \sqrt{(x-6)^2} \geq \sqrt{(x-3)^2}$
 $\leadsto |x-12| - |x-6| \geq |x-3|$
 DE AQUÍ: $|x-6| + |x-3| \leq |x-12| \dots (\alpha)$
 PERO POR LA DESIGUALDAD TRIANGULAR (REVISE)
 $|x-6| + |x-3| \leq |x-6| + |x-3|$

$\rightarrow |2x-9| \leq |x-6| + |x-3| \dots (\beta)$
 DE (α) y (β) POR PROPIEDAD TRANSITIVA:
 $|2x-9| \leq |x-12|$
 • AL \square : $(2x-9)^2 \leq (x-12)^2$
 $\rightarrow (2x-9)^2 - (x-12)^2 \leq 0$
 $\rightarrow (3x-21)(x+3) \leq 0$
 ó $(x-7)(x+3) \leq 0$
 $\leadsto -3 \leq x \leq 7 \therefore C.S. = [-3; 7]$

16) HALEMOS $\left| \frac{|x-1|+3}{4-x} \right|$, CUANDO $x \leq 1$

CS: Si $x \leq 1 \rightarrow x-1 \leq 0$
 CON ESTO: $|x-1| = 1-x$
 REEMPLAZANDO:
 $\left| \frac{|x-1|+3}{4-x} \right| = \left| \frac{1-x+3}{4-x} \right| = \left| \frac{4-x}{4-x} \right| = 1$
 $\therefore A = \{1\}$

17) LA INECUACIÓN LA ESCRIBIMOS

ASÍ: $\frac{|x-3| - |x-4|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}} \leq \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}{|x-3| + |x-4|}$
 CS: $x+1 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0$
 $x \geq -1 \wedge x \geq 2$
 $x \geq 2$ COND. NEC.
 DE LA INECUACIÓN:
 $|x-3|^2 - |x-4|^2 \leq \sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-2}^2$
 $(x-3)^2 - (x-4)^2 \leq x+1 - x+2$
 $(2x-7)(1) \leq 3 \rightarrow x \leq 5$
 INTERSECTANDO CON LA COND. NECESARIA, SE TIENE:

$$2 \leq x \leq 5 \quad \therefore \text{C.S.} = [2; 5]$$

$$(18) \text{ DE } \sqrt{15-|x|} \leq \sqrt{|x|-7} \dots (I)$$

$$\text{OBS: } 15-|x| \geq 0 \wedge |x|-7 \geq 0$$

$$|x| \leq 15 \wedge |x| \geq 7$$

$$7 \leq |x| \leq 15 \quad (\alpha)$$

$$\cdot (I)^2: 15-|x| \leq |x|-7$$

$$\text{DE AQUÍ: } |x| \geq 11 \quad (\beta)$$

$$\text{LUEGO: C.S.} = (\alpha) \cap (\beta)$$

$$\text{INTERSECTANDO: } 11 \leq |x| \leq 15$$

$$\text{DE AQUÍ:}$$

$$-15 \leq x \leq -11 \vee 11 \leq x \leq 15$$

$$\therefore \text{UN INTERVALO} \\ \text{SOLUCIÓN ES: } [11; 15]$$

$$(19) \text{ OBS: } \frac{x-2}{x+4} = \frac{(x+4)-6}{x+4} = 1 - \frac{6}{x+4}$$

$$\hookrightarrow \text{HALLAMOS } 2f \left| 1 - \frac{6}{x+4} \right|$$

$$\text{CUANDO } -3 < x < 3$$

$$\cdot \text{SUMO 4: } 1 < x+4 \leq 7$$

$$\cdot \text{INVIERTO: } \frac{1}{7} \leq \frac{1}{x+4} < 1$$

$$\cdot \text{POR } 6: -6 \leq \frac{6}{x+4} \leq -\frac{6}{7}$$

$$\cdot \text{SUMO 1: } -5 < 1 - \frac{6}{x+4} \leq \frac{1}{7} < 5$$

$$\text{DE AQUÍ: } \left| 1 - \frac{6}{x+4} \right| < 5 \quad \text{ó} \quad \left| \frac{x-2}{x+4} \right| < 5$$

$$\text{OBSÉRVESE: } 0 \leq \left| \frac{x-2}{x+4} \right| < 5$$

$$\cdot \text{SUMO 2: } 2 \leq 2 + \left| \frac{x-2}{x+4} \right| < 7$$

$$\text{CON ESTO: } A = [2; 7]$$

$$(20) \text{ PODEMOS ESCRIBIR:}$$

$$|x-3| + |x+5| \geq |2x+8|$$

$$\text{ELEVAMOS A CUADRADO:}$$

$$(|x-3| + |x+5|)^2 \geq (2x+8)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + 2|x-3||x+5| + x^2 + 10x + 25 \geq 4x^2 + 32x + 64$$

$$\text{REDUCIENDO, SE TIENE:}$$

$$2|x^2 + 2x - 15| \geq 2x^2 + 28x + 30$$

$$\sim |x^2 + 2x - 15| \geq x^2 + 14x + 15$$

$$\text{RECUERDE}$$

$$\text{RESOLVER } |x| \geq 0, \text{ EQUIVALE} \\ \text{A RESOLVER: } x \leq -2 \vee x \geq 2$$

$$\text{APLICANDO:}$$

$$x^2 + 2x - 15 \leq -(x^2 + 14x + 15) \dots (1)$$

$$x^2 + 2x - 15 \geq x^2 + 14x + 15 \dots (2)$$

$$\text{DE (1): } x^2 + 8x \leq 0 \rightarrow x(x+8) \leq 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } -8 \leq x \leq 0 \quad S_1$$

$$\text{DE (2): } 12x \leq -30 \rightarrow x \leq -\frac{5}{2} \quad S_2$$

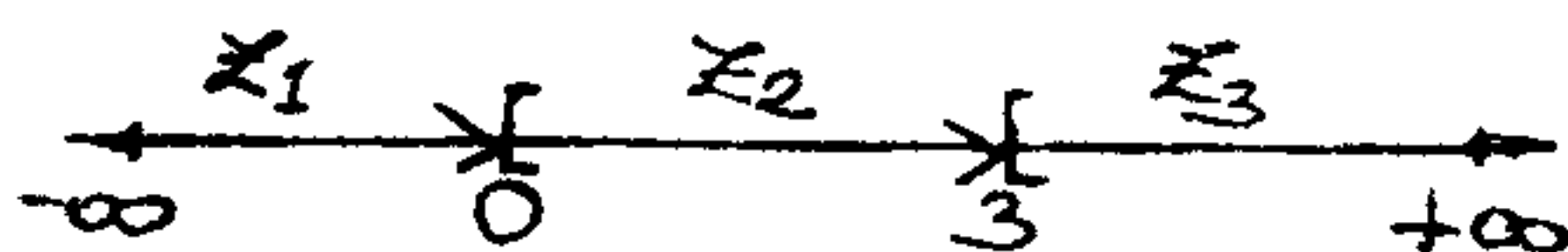
$$\text{LUEGO: C.S.} = S_1 \cup S_2$$



$$\therefore \text{C.S.} = (-\infty, 0] = \boxed{0}$$

$$(21) \text{ SEI} = |x| - |x-3| \dots (I)$$

ANALICEMOS POR ZONAS, GRIFIQUEMOS LOS PUNTOS CRÍTICOS DE LOS VALORES ABSOLUTOS.



• EN z_1 :
 Si $x < 0$ $\rightarrow |x| = -x$
 $\rightarrow |x-3| = 3-x$

EN (I): $y = -x - (3-x) \rightarrow \underline{y = -3}$ (α)

• EN z_2 :
 Si $0 \leq x < 3$ $\rightarrow |x| = x$
 $\rightarrow |x-3| = 3-x$

EN (I): $y = x - (3-x) \rightarrow y = 2x-3$

HALLENDOS y :

COMO $0 \leq x < 3 \rightarrow 0 \leq 2x < 6$

$\rightarrow -3 \leq 2x-6 < 3 \rightarrow \underline{-3 \leq y < 3}$ (β)

• EN z_3 :
 Si $x \geq 3$ $\rightarrow |x| = x$
 $\rightarrow |x-3| = x-3$

EN (I): $y = x - (x-3) \rightarrow \underline{y = 3}$ (θ)

DE (α); (β) y (θ): $y_{\text{MÁX.}} = 3$

22 DE $|2x-1| < \boxed{2-1}$

NUNCA ES (-) \rightarrow DEBE SER > 0

OBJS: $2-1 > 0 \rightarrow 2 > 1$

PERO COMO $2 \in \mathbb{Z}$ Y ADEMÁS ES MÍNIMO $\rightarrow 2 = 2$

JUEGO: $|2x-1| < 1$

DE AQUÍ: $-1 < 2x-1 < 1$

• SUMO 1: $0 < 2x < 2$

• DIVIDO POR 2: $0 < x < 1$

$\therefore x \in (0; 1)$

23 DE $\frac{x^2|x|-1}{x^3-1} \geq 0 \dots (I)$

ANALICEMOS 2 CASOS: $x \geq 0 \vee x < 0$

(1) SI $x \geq 0$

$\rightarrow \frac{x^2(x)-1}{x^3-1} \geq 0 \rightarrow \frac{x^3-1}{x^3-1} \geq 0$

$\rightarrow 1 \geq 0$ ¡DESIGUALDAD ABSOLUTA!

¡OJO! LA DESIGUALDAD (I) SE VERIFICA $\forall x \geq 0 \rightarrow$ C.S. $_1 = [0; +\infty)$

(2) SI $x < 0$

$\rightarrow \frac{x^2(-x)-1}{x^3-1} \geq 0 \rightarrow \frac{-x^3-1}{x^3-1} \leq 0$

$\rightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \leq 0$

OBJS: (x^2-x+1) y (x^2+x+1) SON TRIÁNGULOS POSITIVOS $\forall x \in \mathbb{R}$, DADO QUE SUS DISCRIMINANTES SON NEGATIVOS

\rightarrow LA DESIGUALDAD ANTERIOR EQUIVALE A RESOLVER:

$\frac{x+1}{x-1} \leq 0 \rightarrow -1 \leq x < 1$

\rightarrow C.S. $_2 = [-1; 1)$

FINALMENTE: C.S. = C.S. $_1 \cup$ C.S. $_2$

\sim C.S. = $[0; +\infty) \cup [-1; 1)$

= $[-1; +\infty) - \{1\}$

= $[-1; 1) \cup (1; +\infty)$

24 $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \geq 0$

COMO NOS PIDEN EL MAYOR DE LOS ENTEROS NEGATIVOS $\rightarrow x < 0$

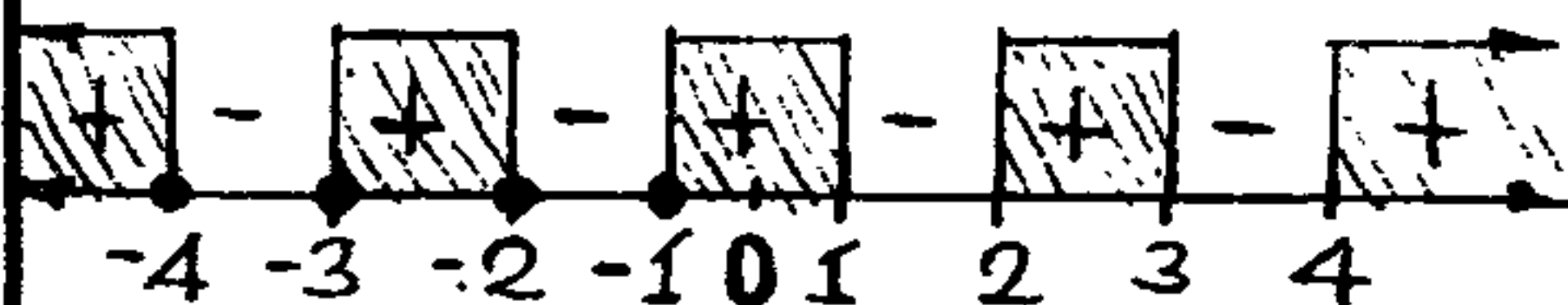
• RESOLVAMOS CON $x < 0$ ($|x| = -x$)
EN LA DESIGUALDAD:

$$\frac{(-x-1)(-x-2)(-x-3)(-x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \geq 0$$

"FACTORIZAMOS" SIGNO A CADA
FACTOR DEL NUMERADOR:

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \geq 0$$

POR PUNTOS CRÍTICOS:



¡NO OLVIDAR, $x < 0$!

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [-3; -2] \cup [-1; 0)$$

∴ MAYOR VALOR
ENTERO NEGATIVO: -1

$$\begin{aligned} (25) \text{ Sea } y &= |x^3 - 2x^2 - 5x + 10| \\ &= |x^2(x-2) - 5(x-2)| \\ &= |(x-2)(x^2-5)| \\ \Rightarrow y &= |x-2||x^2-5| \end{aligned}$$

NOSE PIDE EL MÁXIMO VALOR DE y
DEL DATO: $|x-2| \leq 1 \dots (\alpha)$

$$\Rightarrow -1 \leq x-2 \leq 1$$

• SUMO 2: $1 \leq x \leq 3$

• AL \square : $1 \leq x^2 \leq 9$

• RESTO 5: $-4 \leq x^2-5 \leq 4$

DE AQUÍ: $|x^2-5| \leq 4 \dots (\beta)$

$(\alpha) \wedge (\beta)$: $\underbrace{|x-2||x^2-5|}_{y} \leq 4$

∴ MÁXIMO VALOR DE y : 4

$$(26) |\sqrt{|x-3|} - |x| + 2 > 0$$

• OBS: LA ECUACIÓN TIENE LA FORMA
MA $|2| + 2 > 0$

• ESTA DESIGUALDAD SE VERIFICA
• $\forall x \in \mathbb{R}$

• EN NUESTRO CASO $\sqrt{|x-3|} - |x|$
DEBE PERTENER A \mathbb{R} ; Y PARA
QUE ELLO OCURRA, ES NECESARIO
Y SUFICIENTE QUE: $|x-3| \geq 0$
DONDE VEMOS QUE ESTA SE VE-
RIFICA $\forall x \in \mathbb{R} \therefore C.S. = \mathbb{R}$

$$(27) \text{ DE } \psi:$$

$$x(1-x) < \frac{x^4+1}{x^2+1} + 1 \wedge |x-2| < 3$$

(1)

(2)

RESOLVAMOS (2) (PARECE MÁS SENCILLO).

RECUERDE

SIENDO $a > 0$, RESOLVER $|x| < a$
EQUIVALE A RESOLVER:
 $-a < x < a$

• DE (2): $-3 < x-2 < 3$

• SUMO 2: $-1 < x < 5$

• COMO $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0; 1; 2; \dots; 4$

• LUEGO, PARA OBTENER LA SOLUCIÓN

DE (1) Y (2), SÓLO HABRÁ QUE ANALI-
ZAR QUE VALORES DE x OBTENI-

DOS DE (2) SATISFACEN A (1):

• $x = 0 \rightarrow 0 < 2 \checkmark$

• $x = 1 \rightarrow 0 < 2 \checkmark$

• $x = 2; 3; 4$, VEMOS Q' SE OBTIENE:

#NEGATIVO < #POSITIVO

$\psi = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

∴ $n(\psi) = 5$

18) $|x-1|+x^2 \leq x^2+3 \dots (I)$

Obs: $|x-1|+x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |x-1|+x^2 = |x-1|+x^2$

FN(I): $|x-1|+x^2 \leq x^2+3$

$\sim |x-1| \leq 3$

Por el recuerdo de la resolución (7):

$-3 \leq x-1 \leq 3$

• SUMO 1: $-2 \leq x \leq 4$

20) FN $|2-x|-3 < 1$

APLIQUEMOS EL RECUERDE DE LA RESOLUCIÓN (27)

$\sim -1 < |2-x|-3 < 1$

• SUMO 3: $2 < |2-x| < 4$

RECUERDE

Siendo $0 < a < b$, resolver $a < |x| < b$, equivale a resolver:

$-b < x < -a \vee a < x < b$

En lo anterior:

$-4 < 2-x < -2 \vee 2 < 2-x < 4$

(por -1)

(por -1)



$2 < x-2 < 4 \vee -4 < x-2 < -2$

• SUMAMOS 2:

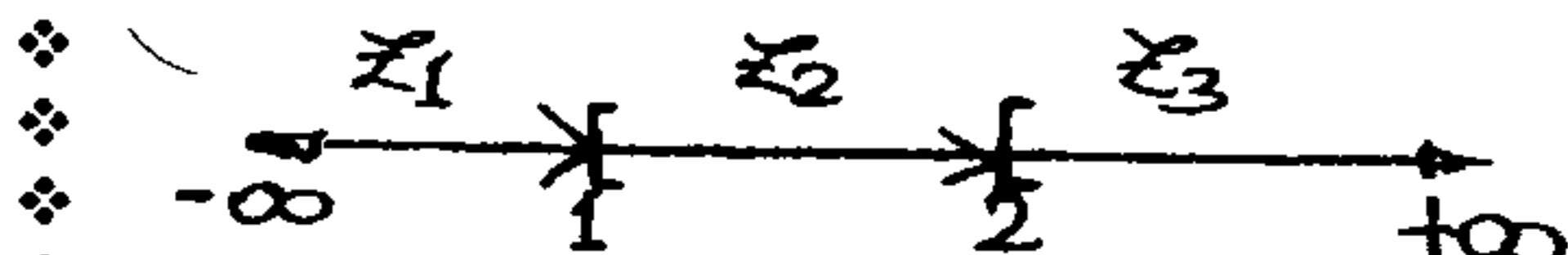
$4 < x < 6 \vee -2 < x < 0$

$\therefore C.S. = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$

NOTA: ESTE RECUERDE SE APLICÓ EN LA RESOLUCIÓN (18) (VERIFIQUE).

30) Sea $y = \frac{1}{|x-1|-|x-2|} \dots (I)$

ANALICEMOS POR ZONAS, SIMILAR A LA RESOL. DEL PROB. (21)



FN z_1 :

Si $x < 1$ $\begin{cases} |x-1| = 1-x \\ |x-2| = 2-x \end{cases}$

FN(I): $y = \frac{1}{1-x-2+x} \rightarrow \underline{y = -1} \quad (\alpha)$

FN z_2 :

Si $1 \leq x < 2$ $\begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |x-2| = 2-x \end{cases}$

FN(I): $y = \frac{1}{x-1-2+x} \rightarrow \underline{y = \frac{1}{2x-3}}$

HALLEMOS Y:

OJO: $2x-3 \neq 0$

COMO $1 \leq x < 2 \rightarrow 2 \leq 2x < 4$

$\rightarrow -1 \leq 2x-3 < 1$; PERO $2x-3 \neq 0$

\Rightarrow ESCRIBIMOS ASÍ:

$-1 \leq 2x-3 < 0 \vee 0 < 2x-3 < 1$

$\frac{1}{2x-3} \leq -1 \vee \frac{1}{2x-3} > 1$

OSEA: $\underline{y \leq -1 \vee y > 1} \quad (\beta)$

FN z_3 :

Si $x \geq 2$ $\begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |x-2| = x-2 \end{cases}$

FN(I): $y = \frac{1}{x-1-x+2} \rightarrow \underline{y = 1} \quad (\theta)$

FINALMENTE DE $(\alpha), (\beta), (\theta)$

$y \in \{-1\} \cup \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle \cup \{1\}$

ESTO ES EQUIVALENTE

$y \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup [1; +\infty)$

ó $y \in \mathbb{R} \setminus \langle -1; 1 \rangle$

FUNCIONES

XVI

CAPÍTULO

Álgebra

01 $A = \{2; 3; 4\}$; $B = \{5; 6\}$

$\Rightarrow A \times B = \{(2; 5), (2; 6), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6)\}$

AQUÍ, VEMOS QUE:

NO ES RELACIÓN DE A EN B,

$R = \{(2; 6), (1; 5)\}$; $1 \notin A$

02 $A = \{3; 5; 7\}$; $B = \{2; 4; 6\}$

$\Rightarrow A \times B = \{(3; 2), (3; 4), (3; 6), (5; 2), (5; 4), (5; 6), (7; 2), (7; 4), (7; 6)\}$

LUEGO:

• SI $R_1 = \{(x; y) \in A \times B / x + y = 9\}$

$\Rightarrow R_1 = \{(3; 6), (5; 4), (7; 2)\}$

• SI $R_2 = \{(x; y) \in A \times B / y = 4\}$

$\Rightarrow R_2 = \{(3; 4), (5; 4), (7; 4)\}$

OBJ: $R_1 - R_2 = \{(3; 6), (7; 2)\}$

$\therefore \text{Dom}(R_1 - R_2) = \{3; 7\}$

03 RECUERDE

UNA RELACIÓN R ES REFLEXIVA EN UN CONJUNTO A , SI Y SÓLO SI $(a; a) \in R, \forall a \in A$

CON ESTO: LA GRÁFICA DE TODA RELACIÓN REFLEXIVA ESTÁ FORMADA POR PUNTOS (EQUIDISTANTES DE LOS

EJES) DE LA FORMA $(a; a)$. SI LA GRÁFICA ES CONTINUA, ÉSTA VIENTE REPRESENTADA POR UNA RECTA QUE FORMA UN ÁNGULO DE 45° CON EL EJE X .

\therefore GRÁFICA APROXIMADA: II

04 $A \times B = \{(m^2; a), (4m-4; b), (5; a), (5; b)\}$

DE AQUÍ:

$A = \{m^2; 4m-4; 5\}$; $B = \{a; b\}$

SIENDO $a \neq b$, VEMOS QUE $n(B) = 2$

PERO $n(A \times B) = 4 \Rightarrow n(A) = 2$

CON ESTO, ÚNICA POSIBILIDAD:

$m^2 = 4m-4 \rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$

$\rightarrow (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2$

$\Rightarrow A = \{4; 5\}$

$\therefore \Sigma$ DE ELEMENTOS: 9

05 DEL GRÁFICO:

$\dagger H(x) = y$

$\dagger H(H(x)) = H(x) = x$

EN LO PEDIDO, SE TIENE:

$\frac{y+x}{y+x} = 1$

06 DE LA GRÁFICA:

$$\# H(H(1)) = H(3) = 2$$

$$\# G(H(2)) = G(1) = 1$$

$$\# G(2) = 9$$

$$\text{LO PEDIDO ES: } 2+1+9 = \underline{12}$$

OT RECUERDE

DADA UNA FUNCIÓN f ,
SI $(a; m)$ y $(a; n) \in f \Rightarrow m = n$.

DE LA FUNCIÓN DADA:

$$\# (4; a) \text{ y } (4; 2b-1) \in f$$

$$\Rightarrow a = 2b-1 \dots (1)$$

$$\# (2; a^2-3a) \text{ y } (2; 2a-6) \in f$$

$$\Rightarrow a^2-3a = 2a-6$$

$$\rightarrow a^2-5a+6=0$$

$$(a-3)(a-2)=0$$

$$\rightarrow a=3 \vee a=2$$

$$\text{EN (1): } b=2 \quad b=\frac{3}{2}$$

OB: PARA $a=2$, SE TIENE QUE:

$$(2; 5) \text{ y } (2; -2) \in f$$

\Rightarrow ¡NO SERÍA FUNCIÓN!

$$\Rightarrow a=3 \wedge b=2 \text{ ¡SI VERIFICA!}$$

$$\therefore \underline{a+b=5}$$

$$\textcircled{08} \# F(x; y) = x^4 - 4xy + y^2 + 4$$

$$\text{OB: } \text{Dom}(F) = \mathbb{R}$$

ADemás:

$$F(a; b) = a^4 - 4ab + b^2 + 4 = 0 \text{ (DATO)}$$

$$\text{OB: } a \wedge b \in \mathbb{R}$$

• HACEMOS SUITA Y PON $(\pm 4a^2)$,
Y ORDENAMOS ASÍ:

$$a^4 - 4a^2 + 4 + 4a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$(a^2-2)^2 + (2a-b)^2 = 0$$

DE AQUÍ, ÚNICA POSIBILIDAD:

$$\# a^2-2=0 \wedge 2a-b=0$$

$$a^2=2 \wedge b=2a$$

$$\Downarrow$$

$$b^2=4a^2$$

$$\rightarrow b^2=8$$

$$\therefore a^2+b^2 = \underline{10}$$

$$\textcircled{09} \text{ DE } f(x) = \sqrt{4-x^2} + 3\sqrt{-x}$$

$$\text{OB: } 4-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2-4 \leq 0$$

$$\rightarrow (x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } -2 \leq x \leq 2$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = \underline{[-2; 2]}$$

$$\textcircled{10} \text{ DE } H(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x} + 2x^2$$

$$\text{OB: } x-2 \geq 0 \wedge 8-x \geq 0$$

$$x \geq 2 \wedge x \leq 8,$$

$$\text{INTERSECTANDO: } 2 \leq x \leq 8$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(H) = [2; 8] \equiv [a; b] \text{ (DATO)}$$

$$\text{OB: } a=2 \wedge b=8$$

$$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{16}{10} = \underline{1,6}$$

$$\textcircled{11} \text{ SI } \text{Ran}(f) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$$

$$\rightarrow 1+|x-3|=|x+1|-3$$

$$\rightarrow |x+1|=|x-3|+4 \quad (\alpha)$$

RECUERDE

$$\text{SI } |x+y|=|x|+|y| \Rightarrow xy \geq 0$$

APLICANDO EN (α) :

$$(x-3)(4) \geq 0 \rightarrow x \geq 3$$

CON ESTO, $\hookrightarrow \text{Dom}(f) = [3; +\infty)$

\therefore MEJOR ELEMENTO
DEL $\text{Dom}(f)$: 3

12) RECUERDE

SIENDO f UNA FUNCIÓN DECRE-
CIENTE Y CONTINUA EN EL IN-
TERVALO $\langle a; b \rangle$, ENTONCES,
SE CUMPLE: $\text{Ran}(f) = \langle f(b); f(a) \rangle$

EN EL PROBLEMA:

$$f(x) = \frac{2x+b}{x-2}; \text{Dom}(f) = \langle 3; 10 \rangle$$

ES DECRECIENTE (DOTO) Y CONTI-
NUA EN DICHO INTERVALO

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = \langle f(10); f(3) \rangle$$

$$\text{POR DOTO: } \text{Ran}(f) = \langle \frac{27}{8}; 6 \rangle$$

$$\text{O SEA QUE: } f(10) = \frac{27}{8} \wedge f(3) = 6$$

PERO VEMOS QUE:

$$f(3) = \frac{3a+b}{3-2} \wedge f(10) = \frac{10a+b}{10-2}$$

DE AQUÍ:

$$\begin{cases} \frac{3a+b}{1} = 6 \\ \frac{10a+b}{8} = \frac{27}{8} \end{cases} \quad \text{RESOLVIENDO:}$$

$$\begin{cases} a=3 \wedge b=-3 \\ \therefore a+b=0 \end{cases}$$

13) $A = \{1; 2\}; B = \{1; 3; 4\}$

$$f: A^2 \rightarrow B / f(x; y) = x+y$$

$$\text{Def: } A^2 = A \times A = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$$

$$\text{Def: } \text{Dom}(f) \subseteq A \times A = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$$

$$\text{Además: } \text{Ran}(f) \subseteq B$$

CÁLCULO DEL RANGO:

$$\bullet f(1; 1) = 1+1 = 2 \notin B$$

$$\bullet f(1; 2) = 1+2 = 3 \in B$$

$$\bullet f(2; 1) = 2+1 = 3 \in B$$

$$\bullet f(2; 2) = 2+2 = 4 \in B$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = \{3; 4\} \subset B$$

$$\therefore \Sigma \text{ DE ELEMENTOS: } \underline{2}$$

14) DE $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}; \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\text{SEA } y = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$$

$$\rightarrow yx^2+y = x^2+2x-1$$

$$(y-1)x^2-2x+(y+1)=0$$

$$\text{DE AQUÍ, COMO } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0$$

$$\text{O SEA: } \Delta = 4 - 4(y-1)(y+1) \geq 0$$

$$\rightarrow 4 \geq 4(y^2-1) \rightarrow y^2-2 \leq 0$$

$$\rightarrow (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \therefore \text{Ran}(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

15) $f(x; y) = x+y / x^2+y^2=1$

$$\text{SEA } z = x+y \rightarrow y = z-x$$

REEMPLAZANDO EN LA IGUALDAD:

$$x^2 + (x-x)^2 = 1$$

DE AQUÍ: $2x^2 - 2xx + (x^2 - 1) = 0$

COMO $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0$

OSEA: $\Delta = 4x^2 - 4(2)(x^2 - 1) \geq 0$

EFFECTUANDO: $x^2 - 2 \leq 0$

$\rightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$

$\rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \therefore \text{Ran}(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

(16) $f(x) = x + \frac{4}{x-2}; \text{Dom}(f) = \langle 2; +\infty \rangle$

OBJ: POR QUITA Y PON (± 2), $f(x)$ SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\underbrace{f(x)}_y = (x-2 + \frac{4}{x-2}) + 2$$

PODEMOS QUE: $(\sqrt{x-2} - \frac{2}{\sqrt{x-2}})^2 \geq 0$

$\forall x \in \langle 2; +\infty \rangle$

$\Rightarrow x-2 + \frac{4}{x-2} \geq 0$

$\Rightarrow x-2 + \frac{4}{x-2} + 2 - 6 \geq 0$

$\Rightarrow \text{Ran}(f) = [6; +\infty)$

\therefore MENOR ELEMENTO: 6
DEL RANGO

(17) SEA $y = f(x) = \frac{1}{x+1}$

$\text{Dom}(f) = \langle -1; 1 \rangle$

OBJ: $-1 < x < 1$

SUMANDO: $0 < x+1 < 2$

• INVIERTO: $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{2}$

$y = f(x)$

$\therefore \text{Ran}(f) = \langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle$

(18) SEA $y = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$\text{Dom}(f) = [-2; 3] - \{-1\}$

OBJ: $y + yx = 1 - x$

$\rightarrow (1+y)x = 1-y \rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$

COMO $-2 \leq x \leq 3$

$\rightarrow -2 \leq \frac{1-y}{1+y} \leq 3$

$\rightarrow -2 \leq \frac{1-y}{1+y} \wedge \frac{1-y}{1+y} \leq 3$

$\frac{y+3}{y+1} \geq 0 \wedge \frac{2y+1}{y+1} \geq 0$

$(y \leq -3 \vee y > -1) \wedge (y < -\frac{1}{2} \vee y \geq -\frac{1}{2})$

INTERSECTANDO: $y \leq -3 \vee y \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore \text{Ran}(f) = \langle -\infty; -3 \rangle \cup [-\frac{1}{2}; +\infty)$

ó $\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \langle -3; -\frac{1}{2} \rangle$

(19) SEA $y = F(x) = -x^2 + 3x + 1$

OBJ: $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}$

COMPLETAMOS CUADRADOS:

$y = 1 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 3x - x^2$

$\rightarrow y = \frac{13}{4} - (\frac{9}{4} - \frac{3x}{2} + x^2)$
TCP

$$\rightarrow y = \frac{13}{4} - \left(\frac{3}{2} - x\right)^2$$

DE AQUÍ: $y \leq \frac{13}{4}; \forall x \in \text{Dom}(f)$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = \left(-\infty; \frac{13}{4}\right]$$

• SEA $y = g(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Obs: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$$y = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1$$

COMPLETAMOS CUADRADOS:

$$y = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 1$$

$$\rightarrow y = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3} + 1$$

$$\rightarrow y = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

DE AQUÍ: $y \geq \frac{2}{3}; \forall x \in \text{Dom}(g)$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(g) = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

LUEGO:

$$\begin{aligned} \text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g) &= \left(-\infty; \frac{13}{4}\right] \cap \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) \\ &= \left[\frac{2}{3}; \frac{13}{4}\right] \end{aligned}$$

20) SEA $y = f(x) = \left\lfloor \frac{2x+3}{x+1} \right\rfloor$;

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_0^+$

f LO PODEMOS ESCRIBIR ASÍ:

$$f(x) = \left\lfloor \frac{2(x+1)+1}{x+1} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \frac{1}{x+1} \right\rfloor$$

Obs: $x > 0 \rightarrow x+1 \geq 1$

• INVERSO: $0 < \frac{1}{x+1} \leq 1$

• SUMO 2: $2 < 2 + \frac{1}{x+1} \leq 3$

$$2 < \frac{2x+3}{x+1} \leq 3$$

DESDOBLANDO:

$$2 < \frac{2x+3}{x+1} < 3 \quad \vee \quad \frac{2x+3}{x+1} = 3$$

DE AQUÍ:

$$y = \left\lfloor \frac{2x+3}{x+1} \right\rfloor = 2 \text{ ó } 3$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = \{2; 3\}$$

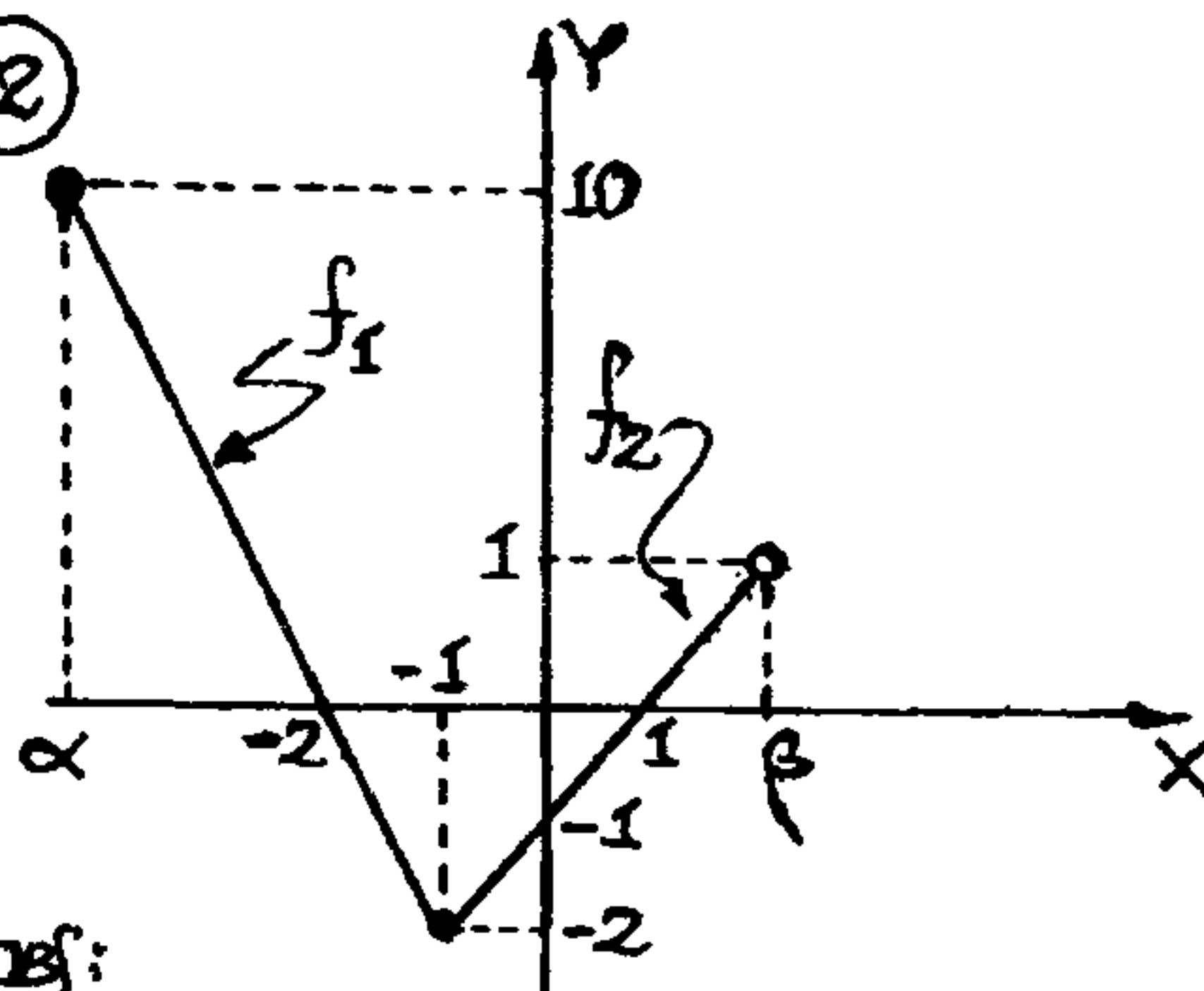
$\therefore \Sigma \text{ DE ELEM. DEL RANGO} = 5$

21) POR REGIA PRÁCTICA SE SABE QUE PARA DETERMINAR SI UNA GRÁFICA DADA REPRESENTA A UNA FUNCIÓN, "TODA RECTA PARALELA AL EJE Y DEBE CORTAR A DICHA GRÁFICA EN A LO MÁS UN PUNTO".

SEGÚN ESTO:

(II) y (IV) REPRESENTAN FUNCIONES

22)



Obs:

$$\text{Dom}(f) = [\alpha; \beta]; \text{Ran}(f) = [-2; 10]$$

• DE f_1 : $f_1(x) = ax + b$

$$\left. \begin{aligned} f_1(-1) &= -a + b = -2 \\ f_1(-2) &= -2a + b = 0 \end{aligned} \right\} \text{RESOLVIENDO:}$$

$$\left. \begin{aligned} -a + b &= -2 \\ -2a + b &= 0 \end{aligned} \right\} a = -2 \wedge b = -4$$

$$\hookrightarrow f_1(x) = -2x - 4$$

$$\text{OBS: } f_1(x) = -2x - 4 = 10 \text{ (VER GRÁF.)}$$

$$\rightarrow x = -7$$

$$\bullet \text{ DE } f_2: f_2(x) = mx + n$$

$$\bullet f_2(-1) = -m + n = -2 \quad \text{RESOLVIENDO}$$

$$\bullet f_2(1) = m + n = 0 \quad m = 1 \wedge n = -1$$

$$\hookrightarrow f_2(x) = x - 1$$

$$\text{OBS: } f_2(\beta) = \beta - 1 = 1 \text{ (VER GRÁF.)}$$

$$\rightarrow \beta = 2$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) \cap \text{Dom}(f) = [-2; 10] \cap [-7; 2]$$

$$= [-2; 2]$$

23) DE LA GRÁFICA, VEMOS QUE:

$$\text{Ran}(f) = (-\infty; -2) \cup (0; 3) \cup (c; +\infty)$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = -2; b = 3; c = 5$$

$$\therefore c + b - a = 10$$

LUEGO:

$$\text{Ran}(G) - \text{Ran}(F) = [-2; +\infty) - [3; +\infty)$$

$$= [-2; 3)$$

25) $f(x) = -3|x-4| + 2$; $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\text{OBS: } f(x) - 2 = -3|x-4| \leq 0; \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$\hookrightarrow f(x) - 2 \leq 0 \rightarrow f(x) \leq 2$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = (-\infty; 2]$$

$$\bullet g(x) = |x^2 - 4|; \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$\text{OBS: } g(x) \geq 0; \forall x \in \text{Dom}(g)$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(g) = [0; +\infty)$$

LUEGO:

$$H = \text{Ran } f \cap \text{Ran } g$$

$$\rightarrow H = (-\infty; 2] \cap [0; +\infty)$$

$$\rightarrow H = [0; 2]$$

$$\text{OBS: ELEMENTOS ENTEROS DE } H,$$

$$\text{SON: } 0; 1; 2$$

$$\therefore \text{SUMA DE ELLOS: } 3$$

24) $f(x) = |2x-1| + 3$; $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\text{OBS: } f(x) - 3 = |2x-1| \geq 0; \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$\hookrightarrow f(x) - 3 \geq 0 \rightarrow f(x) \geq 3$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = [3; +\infty)$$

$$\bullet g(x) = |x+3| - 2; \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$\text{OBS: } g(x) + 2 = |x+3| \geq 0; \forall x \in \text{Dom}(g)$$

$$\hookrightarrow g(x) + 2 \geq 0 \rightarrow g(x) \geq -2$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(g) = [-2; +\infty)$$

26) SIMILAR A LA RESOLUCIÓN 19)

COMPLETAMOS CUADRADOS EN f y g

$$\bullet f(x) = x^2 - 4x + 4 + 1; \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$\text{DE AQUÍ: } f(x) \geq 1; \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = [1; +\infty)$$

$$\bullet g(x) = 19 - 9 - 6x - x^2; \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 19 - (3+x)^2$$

$$\text{DE AQUÍ: } g(x) \leq 19; \forall x \in \text{Dom}(g)$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(g) = (-\infty; 19]$$

Luego:

$$\text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g) = [1; +\infty) \cap (-\infty; 19] \\ = [1; 19]$$

$$27) \cdot y = f(x) = |x+2| + |x-4|$$

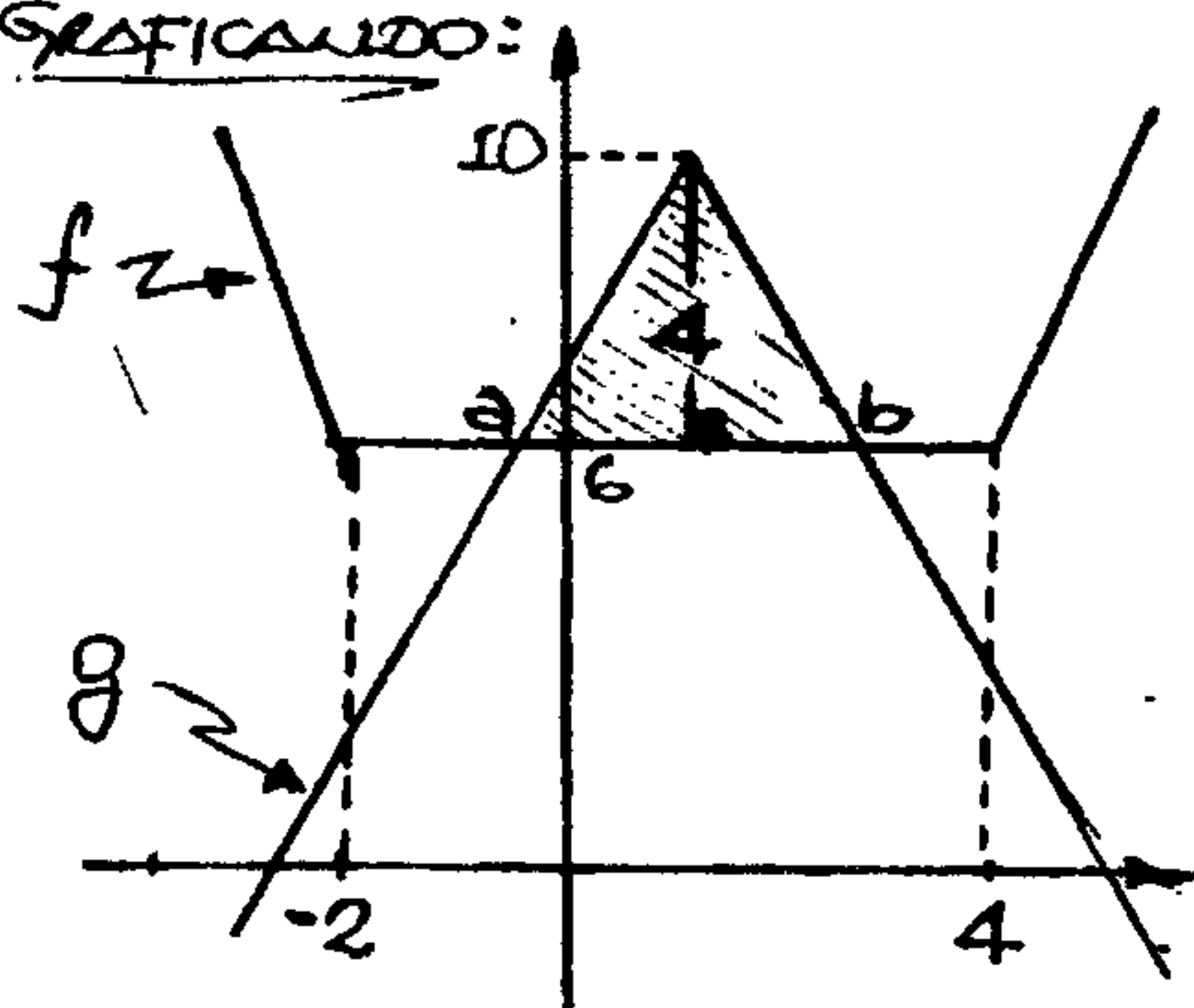
REDEFINIENDO $f(x)$, SE TIENE:

$$y = f(x) \begin{cases} -2x+2; x < -2; R_f = (6; +\infty) \\ 6; -2 \leq x < 4; R_f = \{6\} \\ 2x-2; x \geq 4; R_f = [6; +\infty) \end{cases}$$

$$\cdot g(x) = 10 - |2x-3|$$

$$\text{Obs: } Dg = \mathbb{R} \wedge Rg = (-\infty; 10]$$

GRAFICANDO:



CÁLCULO DE a y b

$$\cdot 6 = 10 - |2x-3| \rightarrow |2x-3| = 4$$

$$\rightarrow 2x-3 = 4 \vee 2x-3 = -4$$

$$x = \frac{7}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Obs: } b = 3.5; \quad a = -0.5$$

$$\text{Luego: } \text{Área} \triangle = \frac{|b-a| \cdot h}{2}$$

$$= \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ u}^2$$

$$28) \cdot f(x) = |2x+3| + |x| + |2x-1|$$

AQUÍ, APLICAMOS EL MÉTODO DE LOS SIGNOS. LO USAREMOS PARA DESAPARECER LAS BARRAS. OBSÉRVESE EN LA GRÁFICA EL SIGNO DE LAS EXPRESIONES QUE SE HALLAN DENTRO DE LAS BARRAS CUANDO x SE HALLA EN DETERMINADO INTERVALO.

| | | | | | |
|----------|-----------|----------------|-----|---------------|-----------|
| $(2x+3)$ | - | + | + | + | |
| x | - | - | + | + | |
| $(2x-1)$ | - | - | - | + | |
| | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |

ANALIZANDO:

$$1) \text{ Si } x < -\frac{3}{2} \rightarrow f_1(x) = -2x-3-x-2x+1$$

$$f_1(x) = -5x-2$$

HALLAMOS $f_1(x)$:

$$x < -\frac{3}{2} \rightarrow -5x > \frac{15}{2} \rightarrow -5x-2 > \frac{11}{2}$$

$$\rightarrow f_1(x) > \frac{11}{2} \hookrightarrow \text{Ran}(f_1) = \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

$$2) \text{ Si } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \rightarrow f_2(x) = 2x+3-x-2x+1$$

$$f_2(x) = -x+4$$

HALLAMOS $f_2(x)$:

$$-\frac{3}{2} \leq x < 0 \rightarrow 0 < -x \leq \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow 4 < -x+4 \leq \frac{11}{2} \rightarrow 4 < f_2(x) \leq \frac{11}{2}$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f_2) = \left(4; \frac{11}{2}\right]$$

$$3) \text{ Si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow f_3(x) = 2x+3+x-2x+1$$

$$f_3(x) = x+4$$

HALLAMOS $f_3(x)$:

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow 4 \leq x+4 < \frac{9}{2}$$

$$\rightarrow 4 \leq f_3(x) < \frac{9}{2} \hookrightarrow \text{Ran}(f_3) = \left[4; \frac{9}{2}\right)$$

4) Si $x > \frac{1}{2} \rightarrow 5x > \frac{5}{2} \rightarrow 5x+2 > \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \text{Ran}(f_4) = [\frac{9}{2}; +\infty)$

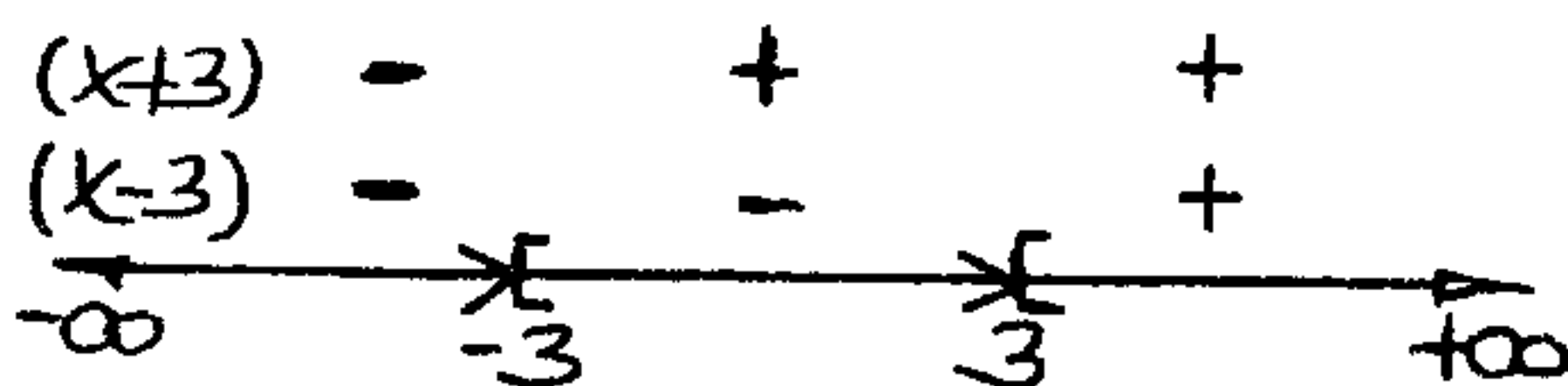
FINALMENTE:

$\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \dots \cup \text{Ran}(f_4)$

$\therefore \text{Ran}(f) = [4; +\infty)$

29) $g(x) = |x+3| - |x-3|$

SIMILAR A LA RESOLUCIÓN ANTERIOR:



1) Si $x < -3 \rightarrow g_1(x) = -x-3 - (3-x)$

$g_1(x) = -6$

$\Rightarrow \text{Ran}(g_1) = \{-6\}$

2) Si $-3 \leq x < 3 \rightarrow g_2(x) = x+3 - (3-x)$

$g_2(x) = 2x$

HALLENDOS $g_2(x)$:

$-3 \leq x < 3 \rightarrow -6 \leq 2x < 6$

$\rightarrow -6 \leq g_2(x) < 6 \Rightarrow \text{Ran}(g_2) = [-6; 6)$

3) Si $x \geq 3 \rightarrow g_3(x) = x+3 - (x-3)$

$g_3(x) = 6$

$\Rightarrow \text{Ran}(g_3) = \{6\}$

FINALMENTE:

$\text{Ran}(g) = \text{Ran}(g_1) \cup \text{Ran}(g_2) \cup \text{Ran}(g_3)$
 $= [-6; 6]$

Por Dato: $[-6; 6] \equiv [a; b]$

Obs: $a = -6 \wedge b = 6$

$\therefore a+b=0$

30) $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$

$f(x) = |x+2| + |x-3|$

PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN

CONSTANTE, CABEN 2 POSIBILIDADES:

(i) $x+2 \geq 0 \wedge x-3 < 0$

\vee

(ii) $x+2 < 0 \wedge x-3 \geq 0$

DE (i): $x \geq -2 \wedge x < 3$

$-2 \leq x < 3$

CON ESTO: $f(x) = x+2 - x+3$

$\rightarrow f(x) = 5$ (CTE.)

SE VE QUE f ES CTE. $\forall x \in [-2; 3)$

ADemás, NÓTESE QUE PARA $x=3$,

SE TIENE TAMBIÉN, $f(x) = 5$

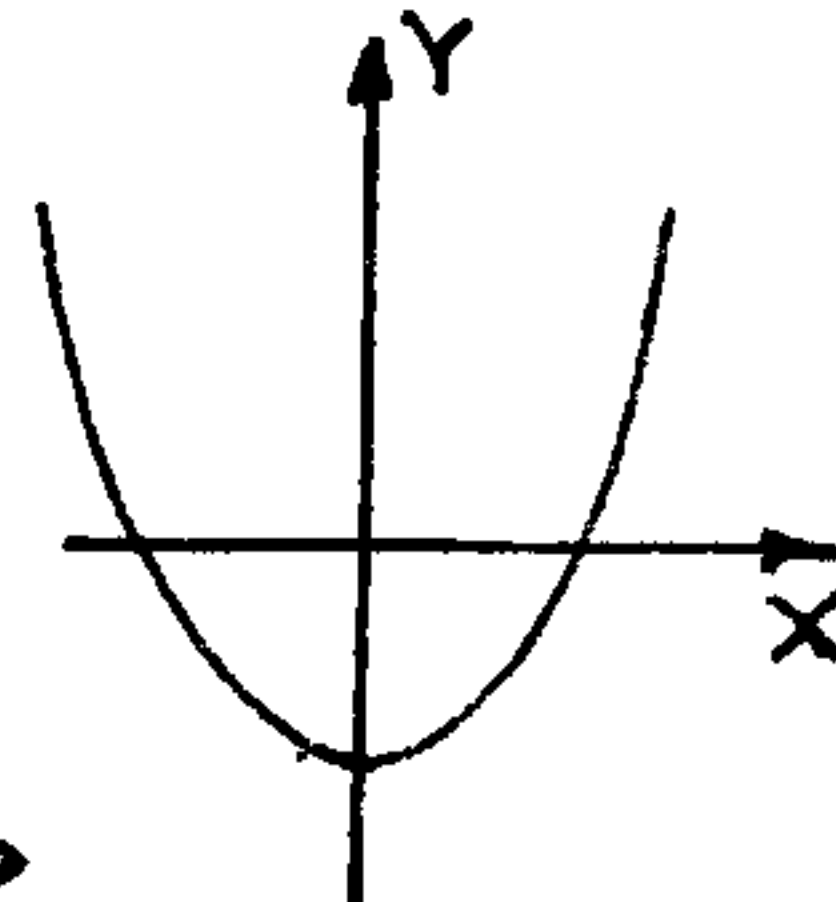
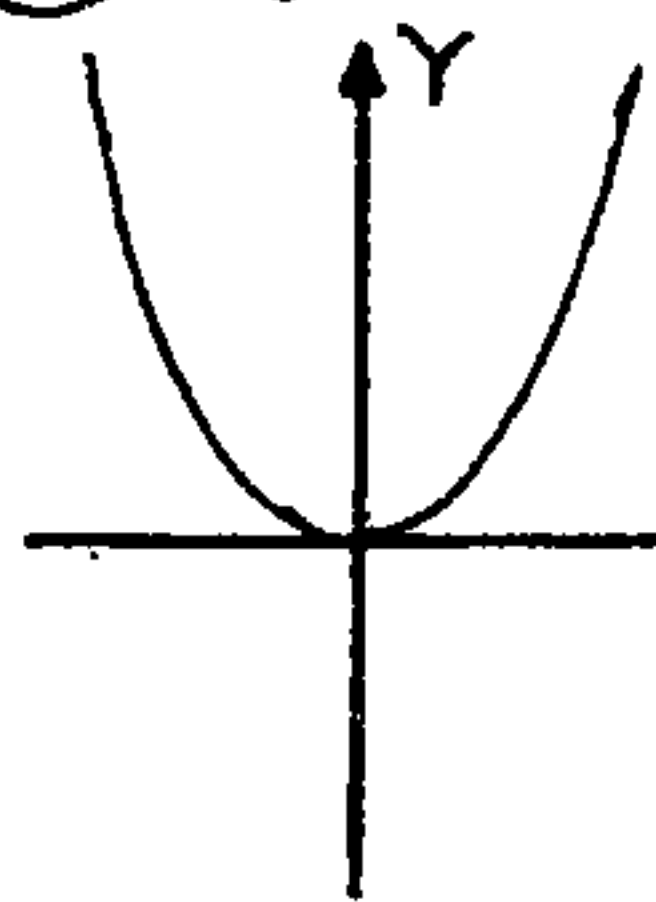
$\Rightarrow f(x)$ ES FUNCIÓN CONSTANTE

$\forall x \in [-2; 3] \equiv [m; n]$ (Dato)

Obs: $m = -2 \wedge n = 3 \therefore m+n=1$

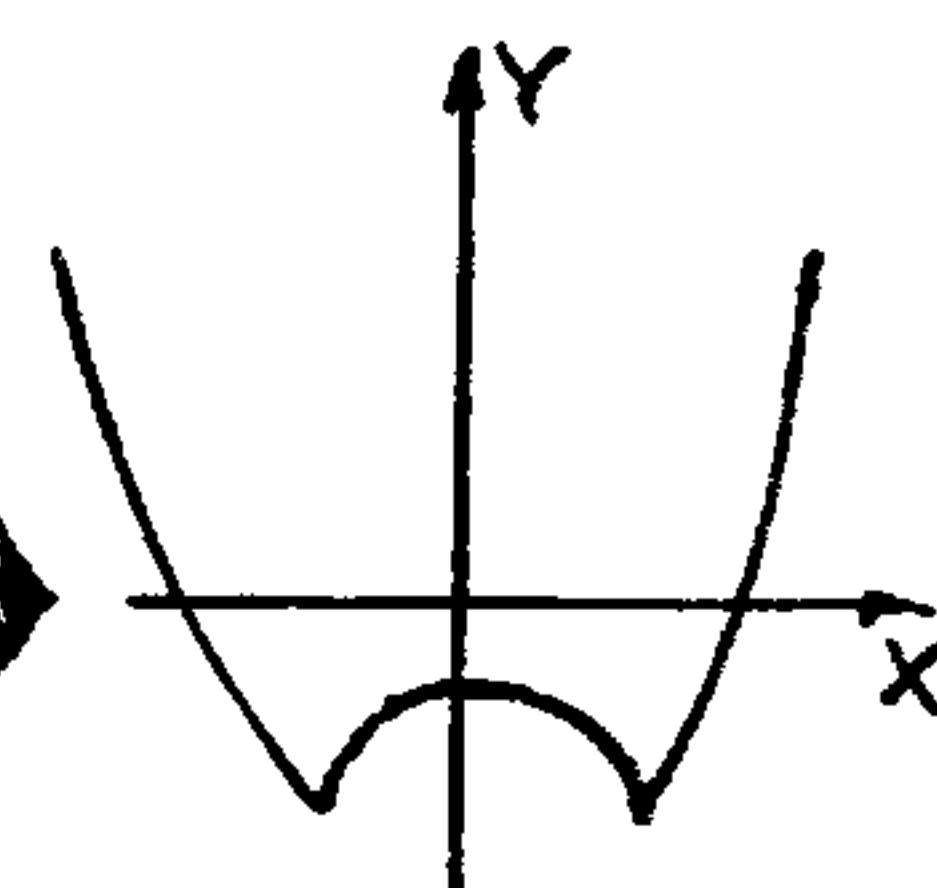
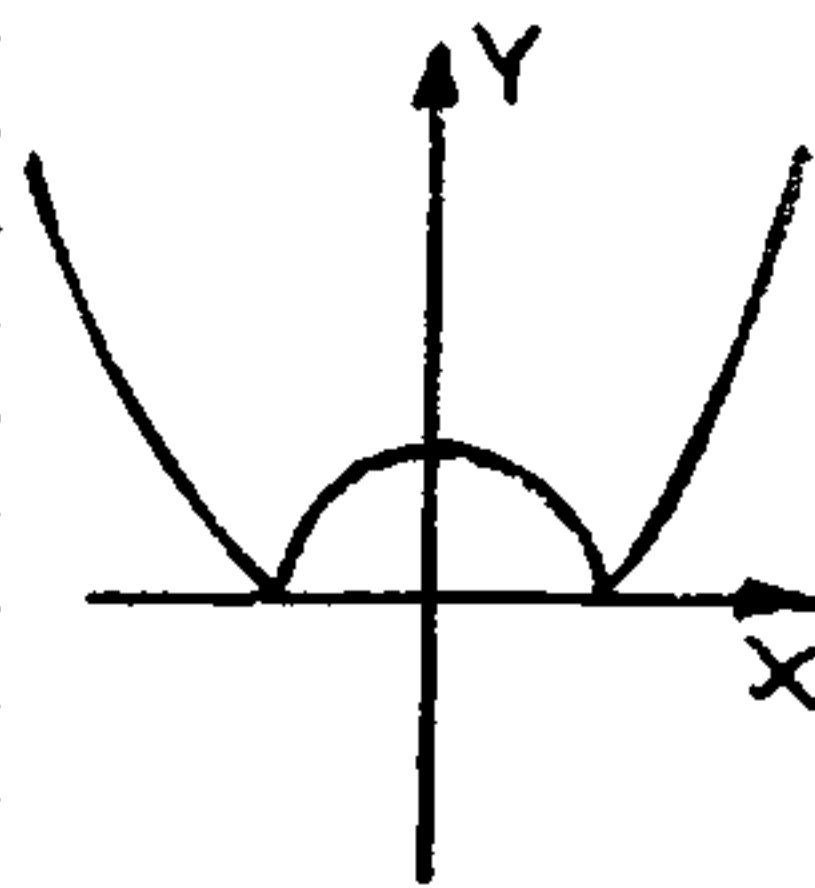
31) $A(x) = x^2$

$B(x) = x^2 - 2$



$C(x) = |x^2 - 2|$

$D(x) = |x^2 - 2| - 3$



FINALMENTE, LA GRÁFICA DE $f(x) = ||x-2|-3|$ SE OBTIENE A PARTIR DE LA GRÁFICA ANTERIOR REFLEJANDO SOBRE EL EJE X TODO AQUELLA PARTE DE LA GRÁFICA QUE SE HALLA DEBAJO DE ESTE EJE.

∴ GRÁFICO APROXIMADO: (D)

$$(32) \cdot f = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 2 \right), (0; 4), (3; 9), (7; -2), (-5; -3) \right\}$$

$$\cdot g = \left\{ (0; -6), (-3; 5), (7; 4), (-5; 1), \left(\frac{1}{2}; 0 \right) \right\}$$

$$\text{Obs: } \text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \left\{ \frac{1}{2}; 0; 7; -5 \right\}$$

Resp:

$$f+g = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 2 \right), (0; -2), (7; 2), (-5; -2) \right\}$$

$$f-g = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 2 \right), (0; 10), (7; -6), (-5; -4) \right\}$$

$$\therefore (f+g) \cap (f-g) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 2 \right) \right\}$$

$$(33) \text{ Lo pedido es } (f+g)(3) = f(3) + g(3)$$

VEAMOS QUE, SEGÚN LAS REGLAS DE CORRESPONDENCIAS:

$$f(3) = 4 \text{ y } g(3) = 2(3) - 3 = 3$$

$$\therefore (f+g)(3) = 4 + 3 = 7$$

$$(34) (f+g)(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 1 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ESTO ES EQUIVALENTE A DECIR:

$$(f+g)(x) = 1; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \text{Ran}(f+g) = \{1\}$$

$$(35) f(x) = \sqrt{4-x^2}; g(x) = \sqrt{-x^2-4x}$$

$$\text{DATO: } h(x) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{-x^2-4x}$$

$$\text{Obs: } 4-x^2 \geq 0 \wedge -x^2-4x \geq 0$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0 \wedge x(x+4) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 2 \wedge -4 \leq x \leq 0$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{Dom}(h) = [-2; 0]$$

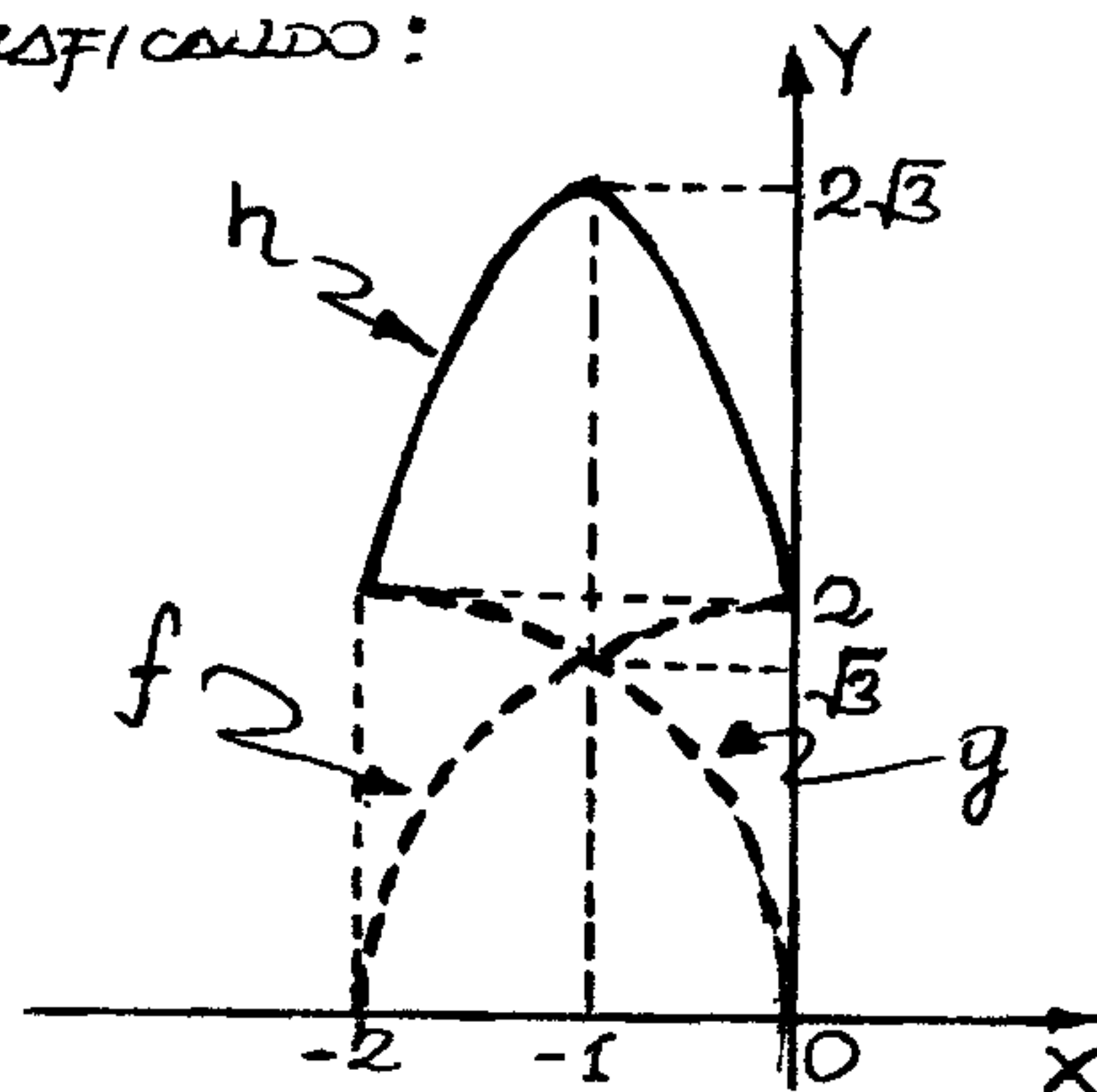
HALLAMOS EL RANGO DE f GRÁFICAMENTE, MEDIANTE LA SUMA DE ORDENADAS PARA CIERTOS PUNTOS DE SU DOMINIO. GRÁFICAMOS f Y g :

f Y g SE PUEDEN ESCRIBIR, ASÍ:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}; g(x) = \sqrt{4-(x+2)^2}$$

$$\text{Dom}(f) = [-2; 2] \quad \text{Dom}(g) = [-4; 0]$$

GRÁFICANDO:



Obs: LA PROYECCIÓN DE LA GRÁFICA DE h , SOBRE EL EJE Y, DETERMINA SU RANGO. ∴ $\text{Ran}(h) = [2; 2\sqrt{3}]$

$$(36) \cdot f = \{(3; 4), (7; 8), (9; b)\}; b > 0$$

$$\text{OJO: } \text{Dom}(f^2) = \text{Dom}(f) = \{3; 7; 9\}$$

$$\hookrightarrow f^2 = \{(3; 16), (7; 64), (9; 6^2)\}$$

$$\bullet g = \{(1; c), (c; a), (7; 16), (10; 21)\}$$

$$\text{OJO: } \text{Dom}\left(\frac{f^2}{g}\right) = \text{Dom}(f^2) \cap \text{Dom } g$$

$$= \{x \in \text{Dom } g / g(x) \neq 0\}$$

$$\hookrightarrow \text{Dom}\left(\frac{f^2}{g}\right) = \text{Dom } h = \{3; 7\}$$

$$\{c; 7\} = \{3; 7\} \hookrightarrow c = 3$$

$$\text{DE AQUÍ: } \frac{f^2}{g} = h = \{(3; 16/a), (7; 64/16)\}$$

IDENTIFICANDO CON EL h DADO:

$$\hookrightarrow \frac{16}{a} = 2 \wedge 4 = b^2$$

$$\rightarrow a = 8 \wedge b = 2$$

$$\therefore a + b + c = 13$$

$$(37) \text{ DE } F \circ G = H \Rightarrow F = H \circ G^*$$

DE LOS DATOS:

$$G^* = \{(6; 3), (9; 5), (5; 7), (4; 8)\}$$

$$H = \{(3; 9), (5; 12), (8; 7)\}$$

ESCOJAMOS LOS PARES ORDENADOS DE G^* Y H (EN ESE ORDEN) CUYAS SEGUNDAS Y PRIMERAS COMPONENTES SEAN RESPECTIVAMENTE IGUALES.

$$\bullet (6; 3) \in G^* \wedge (3; 9) \in H$$

$$\Rightarrow (6; 9) \in H \circ G^*$$

$$\bullet (9; 5) \in G^* \wedge (5; 12) \in H$$

$$\Rightarrow (9; 12) \in H \circ G^*$$

$$\bullet (4; 8) \in G^* \wedge (8; 7) \in H$$

$$\Rightarrow (4; 7) \in H \circ G^*$$

$$\hookrightarrow H \circ G^* = \{(6; 9), (9; 12), (4; 7)\}$$

$$\bullet \text{Dom}(H \circ G^*) = \text{Dom } F = \{6; 9; 4\}$$

$$\bullet \text{Ran}(H \circ G^*) = \text{Ran } F = \{9; 12; 7\}$$

$$\bullet \therefore \text{Dom}(F) \cap \text{Ran}(F) = \{9\}$$

$$(38) f = \{(1; 2), (2; -3), (-3; 1)\}$$

$$g = \{(2; b), (1; 2), (-3; a)\}$$

AHORA, ESCOJAMOS LOS PARES ORDENADOS DE f Y g (EN ESE ORDEN) CUYAS SEGUNDAS Y PRIMERAS COMPONENTES SEAN RESPECTIVAMENTE IGUALES.

$$\bullet (1; 2) \in f \wedge (2; b) \in g$$

$$\Rightarrow (1; b) \in g \circ f$$

$$\bullet (2; -3) \in f \wedge (-3; a) \in g$$

$$\Rightarrow (2; a) \in g \circ f$$

$$\bullet (-3; 1) \in f \wedge (1; 2) \in g$$

$$\Rightarrow (-3; 2) \in g \circ f$$

LUEGO:

$$g \circ f = \{(1; b), (2; a), (-3; 2)\}$$

ADemás:

$$\text{Dom}(f - g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$$

$$= \{1; 2; -3\}$$

$$\hookrightarrow f - g = \{(1; 0); (2; -3 - b); (-3; 1 - a)\}$$

$$\text{POR DATO: } g \circ f = f - g$$

$$\text{OBS: } \bullet b = 0; a = -3 - b; 2 = 1 - a$$

$$b = 0; a + b = -3; a = -1$$

¡Hay contradicción!

$$\therefore g \circ f \text{ nunca es igual a } f - g$$

39) $f(x) = \sqrt{x}$; $\text{Dom}(f) = [0; +\infty)$

$g(x) = 2x+3$; $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$

DE AQUÍ:

$x \in \mathbb{R} \wedge (2x+3) \in [0; +\infty)$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \in [-\frac{3}{2}; +\infty)$

$x \in [-\frac{3}{2}; +\infty)$

$\hookrightarrow \text{Dom}(f \circ g) = [-\frac{3}{2}; +\infty)$

LUEGO:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+3)$

$\hookrightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{2x+3}$; $x \geq -\frac{3}{2}$

OBSÉRVESE QUE: $(f \circ g)(x) \geq 0$

$\hookrightarrow \text{Ran}(f \circ g) = [0; +\infty)$

$\therefore \text{Dom}(f \circ g) \cap \text{Ran}(f \circ g) =$
 $[-\frac{3}{2}; +\infty) \cap [0; +\infty) =$
 $[0; +\infty)$

40) $f(x) = \sqrt{1-x}$; $g(x) = \sqrt{-x^2+4}$

DE f : $1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$

$\hookrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty; 1]$

DE g : $-x^2+4 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4$

$\rightarrow -2 \leq x \leq 2 \hookrightarrow \text{Dom}(g) = [-2; 2]$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$

DE AQUÍ:

$x \in (-\infty; 1] \wedge \sqrt{1-x} \in [-2; 2]$

$x \in (-\infty; 1] \wedge (1-x) \in [0; 4]$

$x \in (-\infty; 1] \wedge -x \in [-1; 3]$

$x \in (-\infty; 1] \wedge x \in [-3; 1]$

INTERSECTANDO: $x \in [-3; 1]$

OFÉD QUE: $\text{Dom}(g \circ f) = [-3; 1]$

ADÉMÁS: $h(x) = g(f(x))$

$= g(\sqrt{1-x})$

$= \sqrt{-(\sqrt{1-x})^2+4}$

$\therefore h(x) = \sqrt{x+3}$; $x \in [-3; 1]$

41) $f(x) = \sqrt{x}$ $x > 0$... (1)
 $g(x) = x^2$... (2)

$\hookrightarrow (f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{2x^2-1}$

$\hookrightarrow f(g(h(x))) = \sqrt{2x^2-1} \dots (3)$

EN (1): $f(g(h(x))) = \sqrt{g(h(x))} \dots (4)$

EN (2): $g(h(x)) = h(x)^2 \dots (5)$

EN (5): $f(g(h(x))) = \sqrt{h(x)^2}$

DE AQUÍ, ASUMIENDO:

$f(g(h(x))) = h(x) \dots (6)$

(6) = (3): $h(x) = \sqrt{2x^2-1}$

AQUÍ: $h(1) = 1 \wedge h(2) = \sqrt{7}$

$\therefore h(1) + h(2) = 1 + \sqrt{7}$

42) $f = \{(2+b; 3), (5; 3+2b), (2-b; 3), (5; 8)\}$

• COMO f ES UNA FUNCIÓN, DONDE

$(5; 3+2b)$ y $(5; 8) \in f$, ENTONCES:

$3+2b = 8 \dots (1)$

• COMO f ES INYECTIVA, DONDE

$(2+b; 3)$ y $(2-b; 3) \in f$, ENTONCES:

$2+b = 2-b \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

EN (1): $2 = \frac{8}{3} \therefore 2+3b = \frac{16}{3}$

43) $f: \text{Dom}(f) \rightarrow B$; $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Si f es SOBRYECTIVA $\Rightarrow \text{Ran}(f) = B$

OBSÉRVESE : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

SEA $y = \frac{2x}{x^2+1} \rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$

DE AQUÍ : $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y^2}}{2y}$

OBS: COMO $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4-4y^2 \geq 0$

$\rightarrow 4y^2 \leq 4 \rightarrow y^2 \leq 1 \text{ ó } -1 \leq y \leq 1$

$\therefore \text{Ran}(f) = [-1; 1] = B$

44) $f: A \rightarrow B$; $A = [-4; 3]$; $B = [a; b]$
y $f(x) = x^3 - 4$

OBS: SI f ES BIYECTIVA \Rightarrow ES INYECTIVA y SURYECTIVA

OSEA QUE : $\text{Ran}(f) = B$

OBS: $\text{Dom}(f) = [-4; 3] \rightarrow -4 \leq x \leq 3$

• AL CUBO : $-64 \leq x^3 \leq 27$

• RESTO 4 : $-68 \leq \underbrace{x^3 - 4}_{f(x)} \leq 23$

$\Rightarrow \text{Ran}(f) = [-68; 23] \equiv [a; b]$

OBS: $a = -68 \wedge b = 23$ (DATO)

$\therefore a+b = -45$

45) $f: [0; 1] \rightarrow [2; 5]$

• SI f ES LINEAL, BIYECTIVA y CRECIENTE $\Rightarrow f(x) = ax+b$, DONDE:

$\text{Ran}(f) = [f(0); f(1)]$

PERO COMO ES SURYECTIVA (POR SER BIYECTIVA); ENTONCES:

$\text{Ran}(f) = [2; 5]$

LUEGO:

$[f(0); f(1)] \equiv [2; 5]$

OBS: $f(0) = 2 \wedge f(1) = 5$

EN f : $* f(0) = b = 2$

$* f(1) = a+b = 5 \rightarrow a = 3$

$\therefore f(x) = \underline{3x+2}$

46) $f(x) = 1 - 2^{-x}$; $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

VERIFIQUEMOS SI f ES INYECTIVA.

SI $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 1 - 2^{-x_1} = 1 - 2^{-x_2}$

$\rightarrow -2^{-x_1} = -2^{-x_2} \rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}$

OBS: f ES INYECTIVA, POR TANTO f TIENE INVERSA.

DONDE: $\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f)$

SABEMOS QUE $2^{-x} > 0, \forall x \in \text{Dom}(f)$

• POR -1: $-2^{-x} < 0$

• SUMO 1: $\underbrace{1 - 2^{-x}}_{f(x)} < 1$

$\Rightarrow \text{Ran}(f) = (-\infty; 1) = \text{Dom}(f^*)$

47) $f: [1; 4] \rightarrow [2; 5]$

• SI f ES LINEAL, BIYECTIVA y DECRECIENTE $\Rightarrow f(x) = ax+b$, DONDE:

$\text{Ran}(f) = [f(4); f(1)]$

PERO COMO f ES SURYECTIVA (POR SER BIYECTIVA), ENTONCES:

$\text{Ran}(f) = [2; 5]$

LUEGO:

$[f(4); f(1)] \equiv [2; 5]$

$$\text{OBS: } f(4)=2 \wedge f(1)=5$$

$$\underline{\text{EN } f: } \begin{cases} * f(4)=4a+b=2 \\ * f(1)=a+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=-1; b=6$$

Por tanto: $\frac{f(x)}{y} = -x+6$

DE AQUÍ: $x=6-y$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$f^*(x)=6-x \therefore f^*(3)=6-3=3$$

48) $f(x)=3x+2$; $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$g(x)=2x-5$; $\text{Dom}(g)=\mathbb{R}$

Si $\phi = g^* \circ f \rightarrow \phi(x) = g^*(f(x)) \dots (I)$

DE g : $y=2x-5 \rightarrow x = \frac{y+5}{2}$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$g^*(x) = \frac{x+5}{2}$$

DE (I): $\phi(x) = g^*(3x+2)$

$$\rightarrow \phi(x) = \frac{(3x+2)+5}{2}$$

$$\phi(x) = \frac{3x+7}{2}$$

Por tanto: $\phi(x) = \phi\left(\frac{x+4}{2}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x+7}{2} = \frac{3\left(\frac{x+4}{2}\right)+7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+7}{2} = \frac{3x+26}{2 \times 2}$$

$$\rightarrow 6x+14=3x+26 \therefore x=4$$

$$h(x)=4-x; x \in (-\infty; -3]$$

$$\underline{\text{DE } h=g^* \circ f \rightarrow h \circ f^* = g^*}$$

$$(g^*)^* = (h \circ f^*)^* \rightarrow g = f \circ h^*$$

$$\underline{\text{O SEA QUE: } g(x) = f[h^*(x)] \dots (I)}$$

DE h : $y=4-x \rightarrow x=4-y$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$h^*(x) = 4-x$$

EN (I): $g(x) = f(4-x)$

$$= 10 - \sqrt{2 - (4-x)}$$

$$\therefore g(x) = 10 - \sqrt{x-2}$$

50) Sea $y=f(x)=2m+3x$

DESPEJANDO x EN FUNCIÓN DE y

$$\Rightarrow x = \frac{y-2m}{3}$$

INTERCAMBIANDO x POR y ; SE TIENE:

DE: $y = \frac{x-2m}{3} \rightarrow f^*(x) = \frac{x-2m}{3}$

Por tanto: $f^*(m+2) = f(m^2)$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\frac{(m+2)-2m}{3} = 2m+3(m^2)$$

$$\rightarrow 2-m = 6m+3m^2$$

$$3m^2+7m-2=0$$

(OBS: TIENE 2 RAÍCES)

Donde: $m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{9}$

49) $f(x) = 10 - \sqrt{2-x}; x \in (-\infty; -2]$

LOGARITMOS

XVII

Algebra

CAPÍTULO

01 SE A X LO PEDIDO:

$$\Rightarrow \log_{\sqrt[5]{9}} 27\sqrt{3} = x$$

Por definición: $\sqrt[5]{9}^x = 27\sqrt{3}$

$$\rightarrow \sqrt[5]{3^{2x}} = 3 \cdot 3^{1/2} \rightarrow 3^{\frac{2x}{5}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Obs: BASES IGUALES \Rightarrow LOS EXPONENTES DEBEN SER IGUALES

$$\Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{3}{2} \quad \therefore x = \frac{15}{4}$$

02 OBSERVACIÓN

DEBE DECIR:

$$\log_{0,6} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{12}} \right)^{-1} + \dots$$

RECUERDE

$$\log_a a^n = n$$

HALLEMOS POR PARTES:

$$\begin{aligned} * \log_{0,6} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{12}} \right)^{-1} &= \log_{0,6} \left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \right)^{-1} \\ &= \log_{0,6} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^{-1} \\ &= \log_{0,6} (0,6)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$+ \log_{\frac{3}{5}} \sqrt[3]{\frac{9}{25}} = \log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5} \right)^{2/3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} * \log_{0,5} \sqrt{\frac{2}{34}} &= \log_{0,5} \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{34 \cdot 8}} \\ &= \log_{0,5} \sqrt{\frac{16}{272}} = \log_{0,5} 2^{4/6} \\ &= \log_{0,5} (0,5)^{-4/6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

LUEGO, TENDREMOS:

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

03 CALCULEMOS $\log_{\sqrt[5]{27}} 3\sqrt[5]{9}$

$$y, \log_{\sqrt[5]{27}} 3\sqrt[5]{9} = y \rightarrow \sqrt[5]{27}^y = 3\sqrt[5]{9}$$

$$\rightarrow \sqrt[5]{3^3}^y = 3 \cdot \sqrt[5]{3^2} \rightarrow 3^{\frac{3y}{5}} = 3 \cdot 3^{\frac{2}{5}} \rightarrow 3^{\frac{3y}{5}} = 3^{\frac{7}{5}}$$

$$\text{DE AQUÍ: } \frac{y}{5} = \frac{7}{5} \rightarrow y = 7$$

Por condición:

$$7 = \sqrt{47 + 4\sqrt{14 + 5\sqrt{29 + 3x}}}$$

ELEVO AL \square y TRANSPONGO:

$$2 = 4\sqrt{14 + 5\sqrt{29 + 3x}}$$

ELEVO A LA 4ª y TRANSPON-

$$GO: 2 = 5\sqrt{29 + 3x}$$

• ELEVO A LA 5ª y TRANSFORMO:

$$3 = \sqrt[5]{x} \rightarrow x = 27$$

LUEGO:

$$(2x+10)^{\log_3 x} = 64^{\log_3 27}$$

$$= 64^{\log_3 3^3} = 64^3 = 64^{\frac{1}{3}} = 4$$

LO PEDIDO SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\left\{ \log_3 x \cdot \log_3 3 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \log_3 3 \cdot \log_3 3 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ 2x \cdot \log_3 3 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

REEMPLAZANDO X, SE TIENE:

$$\left\{ 2(2 \cdot \log_3 3) \cdot \log_3 3 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ 2 \cdot 2^1 \cdot 1 \right\}^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\textcircled{24} (\log_9 3)(\log_{3/2} 3)(\log_{27} 5)(\log_{25} 4)$$

$$= \log_3 3^{\frac{1}{2}} \times \log_{\frac{3}{2}} 27 \times \log_{27} 5 \times \log_{25} 2$$

$$= \frac{1}{2} \times \log_2 2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

REGLA DE LA CADENA

07 RECUERDE

$$\log_n^m = \frac{m}{n}$$

SEA LO PEDIDO E. HALLAMOS POR PARTES (DE DERECHA A IZQUIERDA):

$$* \log_{\frac{1}{5}} 625 = \log_{5^{-1}} 5^4 = -4$$

$$* \text{antilog}_{\frac{1}{2}}(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$$

$$* \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

$$* \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$* \text{antilog}_2 2 = 2^2 = 4$$

LUEGO, LO PEDIDO SE REDUCE A:

$$E = -\log_4 4 = \log_4 4 \Rightarrow E = 1$$

06 RECUERDE

$$\left(\log_b^c \right) = c \log_b$$

$$a > 0; c > 0; b > 0; b \neq 1$$

08 SEA LO PEDIDO, E:

$$\begin{aligned}
 E &= \log_{\frac{1}{6}} \text{antilog} \left(\log_3 + \textcircled{1} \right) \\
 &= \log_{\frac{1}{6}} \text{antilog} \left(\log_3 + \log_2 \right) \\
 &= \log_{\frac{1}{6}} \text{antilog} \left[\log_2 6 \right] \\
 &= \log_{\frac{1}{6}} \text{antilog} \log_2 6^3 \\
 &= \log_{\frac{1}{6}} 6^3 = -\log_6 6^3 = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{09} \quad & \left\{ \frac{\log \log 2}{\log 2} \right\} \log 10 \cdot \log \log 2 \\
 &= \log_2 (\log 2) \\
 &= \log_2 \log 2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{10} \quad & \text{ESCRIBIMOS ASÍ:} \\
 & 31 \log x + 71 \log y = 20 \dots (1) \\
 & 29 \log x - 11 \log y = 40 \dots (2) \\
 & \text{OBS: } x > 0, y > 0 \\
 & (1) + (2): 60 \log x + 60 \log y = 60 \\
 & \rightarrow \log x + \log y = 1 \\
 & \log xy = 1 \\
 & \therefore xy = 10
 \end{aligned}$$

11) APLIQUE EL RECUERDE DE LA RESOLUCIÓN 6 (REVISE):

$$\begin{aligned}
 (5^2)^{\log_3 x} &= (x^2 - 5x + 15)^{\log_5 x} \\
 \text{OBS: } x > 0; x \neq 1 \\
 5^{2 \log_3 x} &= 5^{\log(x^2 - 5x + 15)} \\
 \text{DE AQUÍ: } 2 \log_3 x &= \log(x^2 - 5x + 15) \\
 \log 3^2 &= \log(x^2 - 5x + 15) \\
 9 = x^2 - 5x + 15 &\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\
 x_1 + x_2 &= 5 \quad x_1 x_2 = 6 \\
 \therefore \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1} &= \frac{6}{5+1} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{12} \quad & \text{DE } 3 \log x = 2 \log \frac{x}{2} + \log 32 \\
 & \text{OBS: } x > 0 \\
 & 3 \log x = 2(\log x - \log 2) + \log 2^5 \\
 & 3 \log x = 2 \log x - 2 \log 2 + 5 \log 2 \\
 & \log x = 3 \log 2 \rightarrow \log x = \log 2^3 \\
 & \text{DE AQUÍ: } x = 2^3 \therefore \log_2 x = \log_2 2^3 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{13} \quad & \text{DE } x + \log(1+2^x) = \log 5 + \log 72 \\
 & \rightarrow x + \log(1+2^x) = \log \left(\frac{10^x}{2^x} \right) + \log 72 \\
 & \rightarrow x + \log(1+2^x) = \log 10^x - \log 2^x + \log 72 \\
 & \rightarrow x + \log(1+2^x) = x - \log 2^x + \log 72
 \end{aligned}$$

$$\log(1+2^x) + \log 2^x = \log 72$$

$$\log[(1+2^x) \cdot 2^x] = \log 72$$

DE AQUÍ: $(2^x)^2 + (2^x) - 72 = 0$

$$\begin{array}{c} (2^x) \quad 9 \\ (2^x) \quad -8 \end{array}$$

$$\leadsto (2^x + 9)(2^x - 8) = 0$$

ESTO ES > 0

$$\hookrightarrow 2^x - 8 = 0 \rightarrow 2^x = 2^3$$

obs: $x = 3$

14) DE $\log_3 x + \log_{1/3} x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_9 x = 10$

obs: $x > 0$.

TRANSFORMANDO:

$$\log_3 x + \log_3 x^{-1} + \log_3 x^2 + \log_3 \sqrt{x} = 10$$

$$\log_3 (x \cdot x^{-1} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x}) = 10$$

$$\rightarrow \underbrace{x \cdot x^{-1}}_1 \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^{1/2}}_{x^{5/2}} = 3^{10}$$

$$x^{5/2} = 3^{10}$$

SACO $\sqrt[5]{}$: $x^{1/2} = 3^2$

ELEVO AL \square : $x = 3^4 = 81$

15) DE $\log_5(x^{\log_5 x}) = 4$; obs: $x > 0$

$$\rightarrow \log_5 x \cdot \log_5 x = 4 \rightarrow (\log_5 x)^2 = 4$$

$$\rightarrow \log_5 x = 2 \vee \log_5 x = -2$$

$$\hookrightarrow$$

$$x = 5^2$$

$$\hookrightarrow$$

$$x = 5^{-2}$$

\therefore Mayor solución: $x = 25$

16) Hagamos: $\log x = a \wedge \log y = b$

$$\hookrightarrow [2a^2] + b^2 + 1 = 2ab + 2a$$

$$\rightarrow \underbrace{2a^2 + b^2 + 1}_{\{}} - \underbrace{2ab}_{\{}} - \underbrace{2a}_{\{}} = 0$$

$$\rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 = 0$$

DE AQUÍ, ÚNICA POSIBILIDAD PARA

QUE LA SUMA DE CUADRADOS VALGA 0, ES:

$$a - b = 0 \wedge a - 1 = 0$$

$$a = b \wedge a = 1$$

$$\hookrightarrow a = b = 1$$

SEA QUE: $\log x = \log y = 1$

EN LO PEDIDO:

$$\sqrt[10]{11} = 1$$

17) DE $6e^{3x} + 32e^x = 25e^{2x} + 12$

$$\rightarrow 6(e^x)^3 - 25(e^x)^2 + 32(e^x) - 12 = 0$$

DE AQUÍ, POR CARDANO-VIETE:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{x_3} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\rightarrow e^{x_1 + x_2 + x_3} = 2$$

Tomamos \ln :

$$\ln e^{x_1 + x_2 + x_3} = \ln 2$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = \ln 2$$

18) DE $1 + 2 \log |x| - \log(x+2) = 0$

Obs: $|x| \neq 0 \wedge x+2 > 0$

$x \neq 0 \wedge x > -2$ COND. NECES.

DE LA ECUACIÓN:

$1 + \log x^2 - \log(x+2) = 0$

$\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = -1$

$\rightarrow \frac{x^2}{x+2} = \frac{1}{10} \rightarrow 10x^2 - x - 2 = 0$

$5x \quad 2$
 $2x \quad -1$

$\rightarrow (5x+2)(2x-1) = 0$

Obs: $x = -\frac{2}{5} \vee x = \frac{1}{2}$

¡CUMPLEN CON LA COND. NECES.!

\therefore SUMA DE SOLUCIONES: $-\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$\rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \vee x_2 = \frac{1}{2}$

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{3}{4}$

20) DE $\log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 4^{10}}{2^{11}} \right) = 2x-3$

Obs: $x > 0$; $x \neq 1$

LUEGO: $x^{2x-3} = \frac{(x^{2x-3})^2 + 4^{10}}{2^{11}}$

HAGAMOS $x^{2x-3} = a$

$\Rightarrow a = \frac{a^2 + 4^{10}}{2^{11}}$

$\rightarrow \underbrace{a^2 - 2^{11}a + 2^{20}}_{TCP} = 0 \rightarrow (a - 2^{10})^2 = 0$

DE AQUÍ: $a = 2^{10} \Rightarrow x^{2x-3} = 2^{10}$

$\rightarrow x^{\frac{2x-3}{1}} = 4^{\frac{5}{1}} = 4^{2(4)-3}$

Obs. POR COMPARACIÓN: $x = 4$

$\therefore \left(\frac{4}{x}\right)^{\left(\frac{x}{4}\right)} = 1^1 = 1$

19) LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR:

$\log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) - \log_5 30 = \frac{1}{2x}$

$\log_5 \left(\frac{5^{\frac{1}{x}} + 125}{30} \right) = \frac{1}{2x}$

$\rightarrow 5^{\frac{1}{2x}} = \frac{5^{\frac{1}{x}} + 125}{30}$

Si HACEMOS $5^{\frac{1}{2x}} = y \rightarrow 5^{\frac{1}{x}} = y^2$

REEMPLAZANDO:

$y = \frac{y^2 + 125}{30} \rightarrow y^2 - 30y + 125 = 0$
 $(y-25)(y-5) = 0$

DE AQUÍ: $y = 5^2 \vee y = 5$

REQUIRIENDO:

$5^{\frac{1}{2x}} = 5^2 \vee 5^{\frac{1}{2x}} = 5^1$

$\Rightarrow \frac{1}{2x} = 2 \vee \frac{1}{2x} = 1$

21) DE $\log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \right) = 2$

OBSÉRVESE QUE:

$(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$

$\Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$

EN LA ECUACIÓN:

$\log \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}} = 2$

$\rightarrow \log (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 2$

$$\rightarrow 2 \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2$$

$$\text{DE AQUÍ: } x + \sqrt{x^2 - 1} = 10$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 10 - x$$

$$\cdot \text{AL } \square: x^2 - 1 = 100 - 20x + x^2$$

$$\rightarrow 20x = 101 \rightarrow x = \frac{101}{20} = 5,05$$

$$\textcircled{22} \text{ DE } \ln x^{\ln x} + \ln \sqrt[4]{e^4} = \ln x^{2e}$$

$$\text{OBS: } x > 0$$

$$\rightarrow \ln x \cdot \ln x + \ln e^{\frac{4}{3}} = 2e \ln x$$

$$\rightarrow (\ln x)^2 - 2e(\ln x) + \frac{4}{3} = 0$$

$$\rightarrow 3(\ln x)^2 - 6e(\ln x) + 4 = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{6e}{3}$$

$$\ln(x_1 x_2) = 2e$$

$$\therefore x_1 x_2 = e^{2e}$$

$$\textcircled{23} \text{ DE } \ln|x| + x^2 + 9 = 4 \sqrt{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{OBS: } x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$\text{LUEGO: } \ln x + x^2 + 9 = (\sqrt{2}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \ln x + x^2 + 9 = (\sqrt{2}x)^2$$

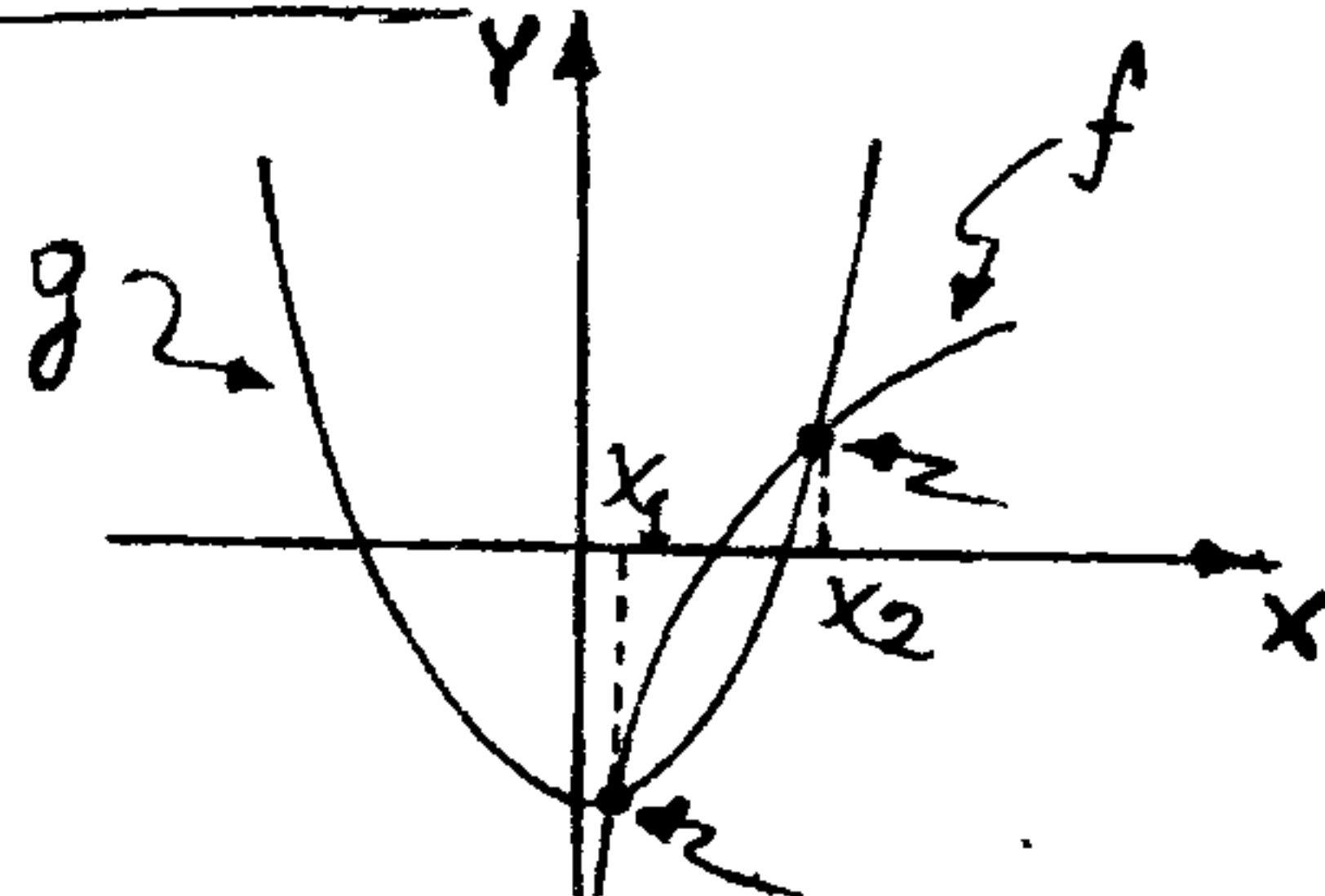
$$\rightarrow \ln x + x^2 + 9 = 2x^2$$

$$\rightarrow \underbrace{\ln x}_{f(x)} = \underbrace{x^2 - 9}_{g(x)}; x > 0$$

OBS: RESOLVAMOS GRÁFICAMENTE;
GRIFIQUEMOS LAS FUNCIONES f y g ; DONDE, EL # DE PUNTOS DE CORTE

TE DE AMBAS GRÁFICAS NOS DETERMINARÁ EL # DE SOLUCIONES REALES DE LA ECUACIÓN $f(x) = g(x)$

GRAFICANDO:



OBS: 2 PUNTOS DE CORTE.

$$\hookrightarrow \text{C.S.} = \{x_1, x_2\} \therefore n(\text{C.S.}) = 2$$

$$\textcircled{24} \text{ DE } 2 \ln(x+3) = \frac{\log Kx}{\log e}$$

$$\rightarrow \text{C.S.} = \{b\}$$

$$\text{OBS: } Kx > 0 \wedge x > -3$$

$$\text{LUEGO: } \ln(x+3)^2 = \log_e 10 \cdot \log Kx$$

$$\rightarrow \ln(x+3)^2 = \ln(Kx)$$

$$\rightarrow x^2 + 6x + 9 = Kx$$

$$\rightarrow x^2 + (6-K)x + 9 = 0$$

COMO EL $n(\text{C.S.}) = 1$ (DATO)

\hookrightarrow LA ECUACIÓN TIENE $\Delta = 0$

$$\rightarrow \Delta = (6-K)^2 - 4(1)(9) = 0$$

$$(6-K)^2 - 6^2 = 0$$

$$(6-K+6)(6-K-6) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } K(K-12) = 0$$

$$\rightarrow K = 0 \vee K = 12$$

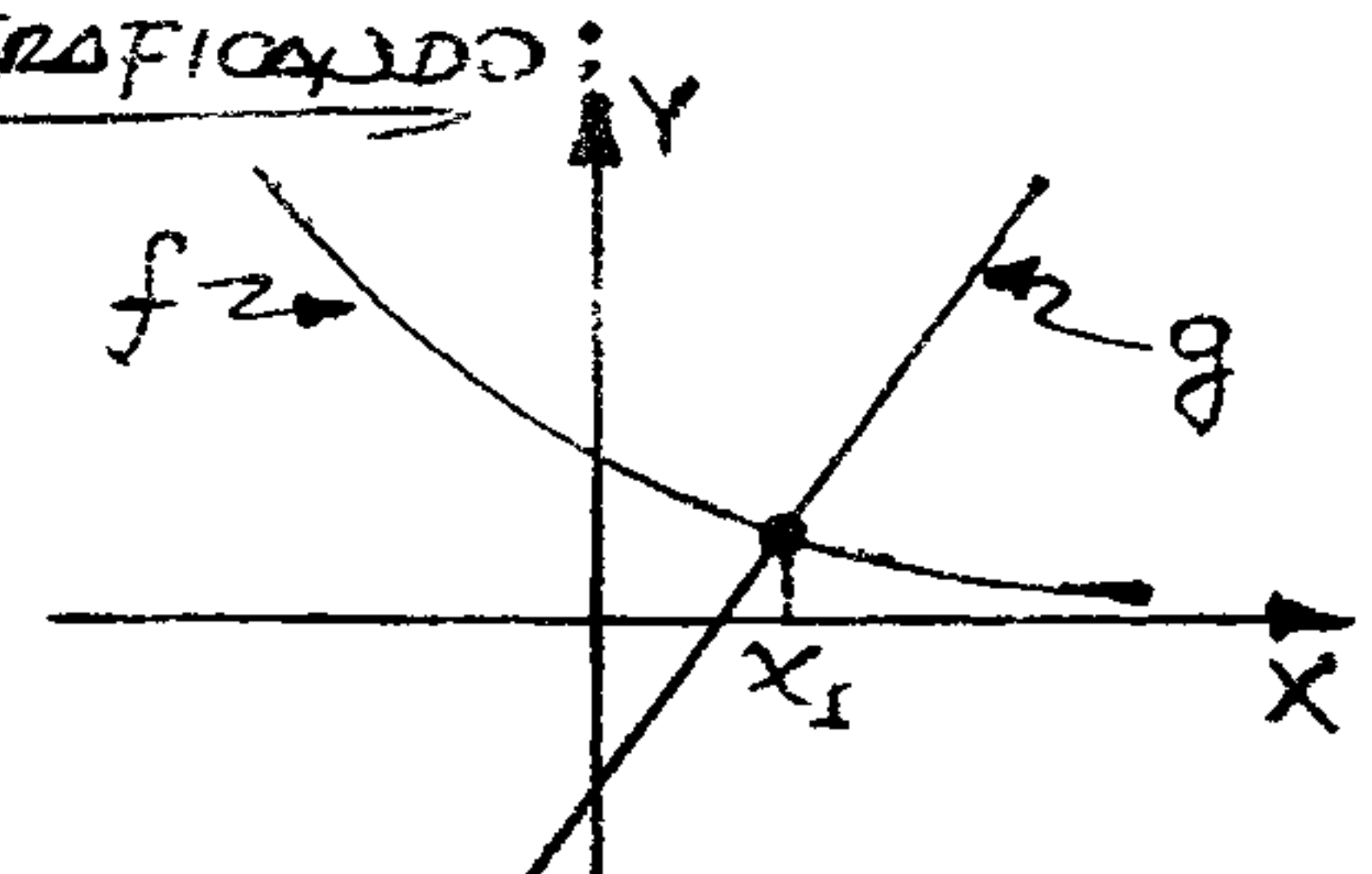
$$\text{OBS: PARA } K = 12 \rightarrow x = 3$$

25) $\log x + 3 \log y = 5 \dots (1)$
 $\log \frac{x^2}{y} = 3 \dots (2)$
 OBS: $x > 0 \wedge y > 0$
 DE (1): $\log x + \log y^3 = 5$
 $\log(xy^3) = 5$
 $\rightarrow xy^3 = 10^5 \dots (\alpha)$
 DE (2): $\frac{x^2}{y} = 10^3$
 AL CUBO: $\frac{x^6}{y^3} = 10^9 \dots (\beta)$
 (α) x (β): $x^7 = 10^{14}$
 Sacando raíz: $x = 10^2 = 100$

26) $x^{x+y} = y^{x-y} \dots (1)$
 $\log \left(\frac{x}{y} \right) = \log \left(\frac{1}{x^6} \right) \dots (2)$
 OBS: $\frac{x}{y} > 0; xy > 0; xy \neq 1$
 DE (2): $\log \left(\frac{x}{y} \right) = \log \left(\frac{1}{x^6} \right)$
 DE AQUÍ: $\frac{x}{y} = \frac{1}{x^2} \rightarrow y = x^3 \dots (\alpha)$
 REEMPLAZO EN (1):
 $x + x^3 = (x^3)^{x-x^3}$
 $\rightarrow \frac{x}{x} = \frac{3x-3x^3}{x}$
 OBS: BASES IGUALES, ENTONCES:
 $x + x^3 = 3x - 3x^3$
 DE AQUÍ: $2x^3 - x = 0$
 $x(2x^2 - 1) = 0$

$x(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1) = 0$
 DE AQUÍ:
 $x = 0, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 EN (α): Si $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
 ó $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$

27) $x\sqrt{x+y} = 2 \dots (1)$
 $(x+y) \cdot 3^{x-1} = 93312 \dots (2)$
 DE (1): $x+y = 2^x \dots (\alpha)$
 EN (2): $2^x \cdot 3^{x-1} = 93312$
 $\rightarrow 2^x \cdot 3^x = 93312 \times 3$
 $6^x = 6^7 \rightarrow x = 7$
 EN (α): $7+y = 2^7 \rightarrow y = 121$
 $\therefore x-y = -114$

28) DE $e^{-x} - x + 1 = 0$
 $\rightarrow \frac{e^{-x}}{f(x)} = \frac{x-1}{g(x)}$
 RESOLVAMOS SIMILAR A LA RESOLUCIÓN (23) (REVISE):
 GRAFICANDO:


OBSERVÉSE UN PUNTO DE CORTE DE AMBAS GRÁFICAS.

$$C.S. = \{x_1\} \therefore n(C.S.) = 1$$

$$(29) f(x) = \ln(\log_{\frac{1}{3}}(\log_2(9-x)))$$

PARA GARANTIZAR LA EXISTENCIA DE $f(x)$, SE DEBE CUMPLIR:

$$9-x > 0 \wedge \log_2(9-x) > 0 \wedge$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_2(9-x)) > 0$$

DE AQUÍ:

$$x < 9 \wedge 9-x > 1 \wedge \log_2(9-x) < 1$$

$$x < 9 \wedge x < 8 \wedge 9-x < 2$$

$$x < 9 \wedge x < 8 \wedge x > 7,$$

$$\text{INTERSECTANDO: } 7 < x < 8$$

$$\text{Obs: } x \notin \mathbb{Z}$$

\therefore # DE VALORES

$$\text{ENTEROS DE } x : 0$$

$$(30) f(x) = \log_4(\log_3(\log_2(8-x)))$$

$$\text{Obs: } 8-x > 0 \wedge \log_2(8-x) > 0 \wedge$$

$$\log_3(\log_2(8-x)) > 0$$

DE AQUÍ:

$$x < 8 \wedge 8-x > 1 \wedge \log_2(8-x) > 1$$

$$x < 8 \wedge x < 7 \wedge 8-x > 2$$

$$x < 8 \wedge x < 7 \wedge x < 6,$$

$$\text{INTERSECTANDO: } x < 6$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = (-\infty; 6)$$

$$(31) f(t) = 6000e^{kt}$$

$$\text{PARA } t=0 \rightarrow f(0) = 6000 \text{ (POBLACIÓN INICIAL)}$$

$$\text{Obs: } 25\% \text{ DE } 6000 = 1500$$

$$\text{PARA } t=10, \text{ SE TIENE:}$$

$$f(10) = 6000 + 1500$$

$$6000e^{10k} = 7500$$

$$\text{DE AQUÍ: } e^{10k} = \frac{5}{4}$$

$$\text{DENTRO DE 20 AÑOS:}$$

$$(t=20)$$

$$f(20) = 6000e^{20k} = 6000(e^{10k})^2$$

$$\Rightarrow f(20) = 6000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 6000 \cdot \frac{25}{16}$$

$$\therefore f(20) = 9375$$

$$(32) \text{ PAREMOS QUE } x^2 = |x|^2$$

$$\text{DE } \log(10 \log |x|^2) > 1$$

$$\text{Obs: } 10 \log |x|^2 > 10$$

$$\log |x|^2 > 1$$

$$|x|^2 > 10$$

$$|x| \leq -\sqrt{10} \vee |x| \geq \sqrt{10}$$

$$\text{De aquí: } |x| \geq \sqrt{10}$$

$$\therefore \text{Menor valor de } |x| : \sqrt{10}$$



Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

(33) DE $\log_5(4x+2) - 2 > \log_5(2-8x)$

Obs: $4x+2 > 0 \wedge 2-8x > 0$

$x > -\frac{1}{2} \wedge x < \frac{1}{4}$

INTERSECTANDO: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$

COND. NECES.

DE LA INECUACIÓN:

$\log_5(4x+2) - \log_5 25 > \log_5(2-8x)$

$\log_5\left(\frac{4x+2}{25}\right) > \log_5(2-8x)$

DE AQUÍ: $\frac{2(2x+1)}{25} > 2(1-4x)$

$\rightarrow 2x+1 > 25-100x \rightarrow 102x > 24$

$\rightarrow x > \frac{4}{17}$

INTERSECTAMOS LO OBTENIDO CON LA CONDICIÓN NECESARIA; SE

OBTIENE: $\frac{4}{17} < x < \frac{1}{4}$

OBSÉRVESE: \nexists VALORES ENTEROS DE x .

$\therefore \nexists$ DE VALORES ENTEROS DE x : $\frac{0}{x}$

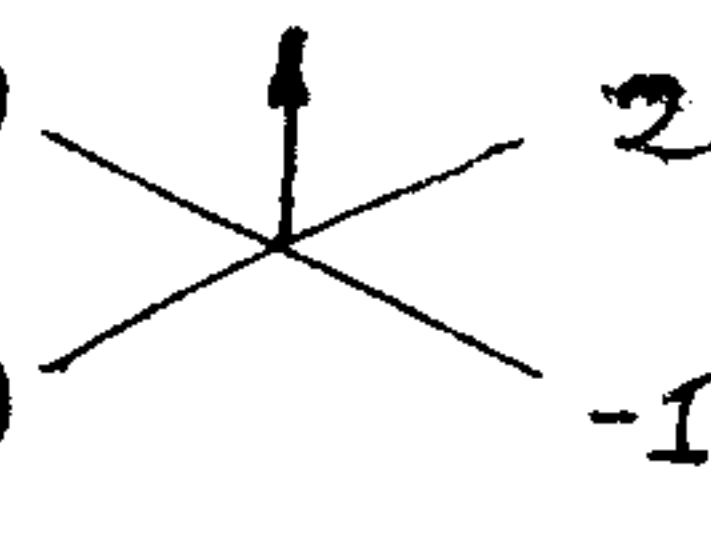
(34) DE $\log_2^2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 5$

Obs: $x-1 > 0 \rightarrow x > 1$ (COND. NEC.)

DE LA INECUACIÓN:

$\log_2^2(x-1) - \log_2(x-1)^{-1} > 2$

$\log_2^2(x-1) + \log_2(x-1) - 2 > 0$

$\log_2(x-1)$ 

$\rightarrow (\log_2(x-1) + 2)(\log_2(x-1) - 1) > 0$

$\rightarrow \log_2(x-1) < -2 \vee \log_2(x-1) > 1$

$x-1 < 2^{-2} \vee x-1 > 2$

$x < \frac{5}{4} \vee x > 3$

INTERSECTANDO LO OBTENIDO CON LA COND. NECES., SE TIENE:

$1 < x < \frac{5}{4} \vee x > 3$

\therefore UN INTERV. SOLUCIÓN ES: $[3; +\infty)$

(35) DE $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{11}(x^2-5)) > 0$

Obs: $x^2-5 > 0 \wedge \log_{11}(x^2-5) > 0$

$x^2 > 5 \wedge x^2-5 > 1$

$x^2 > 5 \wedge x^2 > 6$

INTERSECTANDO: $x^2 > 6$

$\rightarrow x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6}$ (COND. NECES.)

DE LA INECUACIÓN:

$\log_{11}(x^2-5) < 1 \rightarrow x^2-5 < 11$

$\rightarrow x^2 < 16 \rightarrow -4 < x < 4$

INTERSECTANDO LO OBTENIDO CON LA COND. NECESARIA, SE TIENE:

NE: $-4 < x < -\sqrt{6} \vee \sqrt{6} < x < 4$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \langle -4; -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}; 4 \rangle$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = -4 \wedge b = -\sqrt{6}$$

$$\text{NOS PUEDE: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\ = 16 - 6 = 10$$

$$(36) \text{ DE } \log_x \left(\frac{2-x}{x-5} \right) > 1$$

$$\text{OBS: } \frac{2-x}{x-5} > 0 \rightarrow \frac{x-2}{x-5} < 0$$

$$\Rightarrow 2 < x < 5 \quad \text{COND. NEC. (a)}$$

Con esto, en la desigualdad dada se tiene:

$$\frac{2-x}{x-5} > x$$

COMO $2 < x < 5$, ENTONCES $(x-5)$ ES NEGATIVO

$$\Rightarrow 2-x < x(x-5) \\ x^2 - 4x - 2 > 0 \\ (x-2)^2 - 6 > 0 \\ (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6}) > 0 \\ x < 2-\sqrt{6} \vee x > 2+\sqrt{6}$$

INTERSECTANDO esto con (a):

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \langle 2+\sqrt{6}; 5 \rangle$$

$$(37) \text{ DE } \log \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right) \geq 0$$

OBSÉRVESE: LOS TRINOMIOS (x^2-x+1) Y (x^2+x+1) SON (+)S, $\forall x \in \mathbb{R}$, DADO QUE TIENEN $\Delta < 0$; OSEA QUE $\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right)$ ES (+), $\forall x \in \mathbb{R}$

LUEGO, DE LA INECUACIÓN:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geq 1 \rightarrow x^2-x+1 \geq x^2+x+1$$

$$\rightarrow 2x \leq 0 \rightarrow x \leq 0$$

\therefore MEJOR ENTERO
NO SOLUCIÓN ES: $\frac{1}{x}$

$$(38) \text{ DE } 2 - \log_4 |3x-2| \leq 0$$

$$\log_4 |3x-2| \geq 2$$

$$\rightarrow |3x-2| \geq 16$$

$$\rightarrow 3x-2 \leq -16 \vee 3x-2 \geq 16$$

$$x \leq -\frac{14}{3} \vee x \geq 6$$

OBS: MEJOR SOL. POSITIVA: $\frac{6}{x}$

39) SIMILAR A LA RESOLUCIÓN 35)
DE $\log_{16}(\log_4(2-x^2)) < 0$

Obs: $2-x^2 > 0 \wedge \log_4(2-x^2) > 0$

$$x^2 < 2 \wedge 2-x^2 > 1$$

$$x^2 < 2 \wedge x^2 < 1$$

INTERSECTANDO: $x^2 < 1$

DE AQUÍ: $-1 < x < 1$ COND. NEC.

DE LA INECUACIÓN:

$$\log_4(2-x^2) < 1$$

$$\rightarrow 2-x^2 < 4 \rightarrow x^2 > -2$$

OJO: ¡XER!

INTERSECTANDO LO OBTENIDO CON LA COND. NEC., SE TIENE:

$$-1 < x < 1 \Rightarrow \text{C.S.} = (-1; 1)$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = -1 \wedge b = 1$$

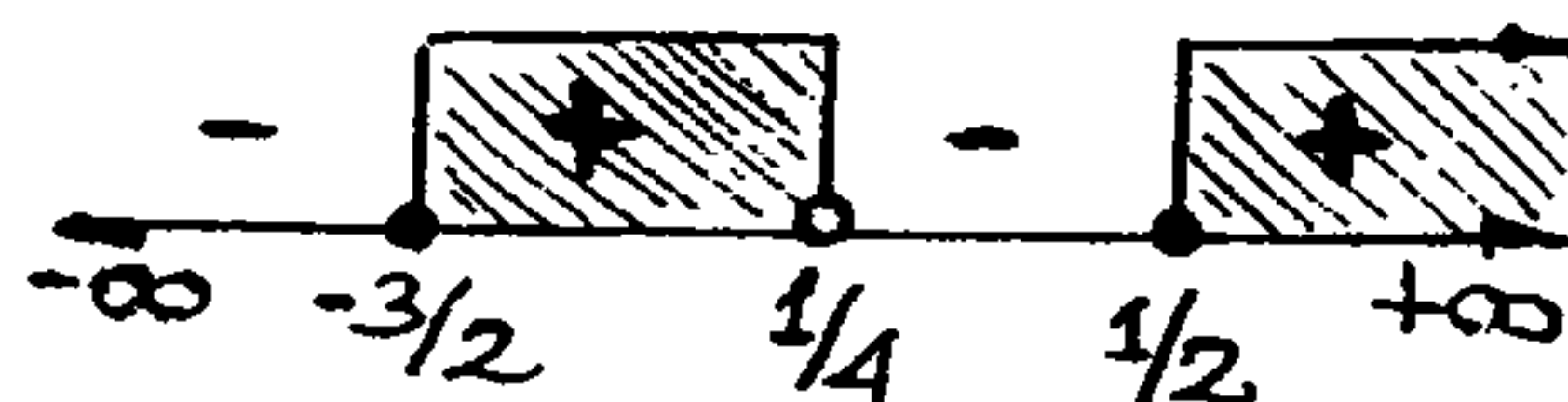
$$\therefore a+b=0$$

40) DE $\log_2\left(\frac{2x^2+4x-2}{4x-1}\right) \geq -1$

$$\rightarrow : \frac{2x^2+4x-2}{4x-1} \geq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{4x^2+8x-4-4x+1}{(4x-1) \cdot 2} \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{4x^2+4x-3}{4x-1} \geq 0 \rightarrow \frac{(2x+3)(2x-1)}{4x-1} \geq 0$$



$$-\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = -\frac{3}{2} \wedge b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{a^2}{b} = \frac{9/4}{1/4} = 9$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL EN UNA VARIABLE REAL

XVIII

CAPÍTULO

Algebra

NOTA

EL CÁLCULO DE FORMAS INDETERMINADAS COMO $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ PARA ESTA PARTE, LO REALIZAREMOS ÚNICAMENTE MEDIANTE TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS. UD. COMO OTRA FORMA DE CÁLCULO (SI ES CONVENIENTE), HÁGALO MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS (L'HOSPITAL)

TEOREMA

SIENDO

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = L$$

SE VERIFICA QUE:

$$L = \begin{cases} 0 & ; \text{SI } m < n \\ \frac{a_0}{b_0} & ; \text{SI } m = n \\ +\infty & ; \text{SI } m > n \text{ y } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & ; \text{SI } m > n \text{ y } \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$$

01) NOS PIDEN:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{n^3} = L$$

02):

GRADO DEL NUM. = GRADO DEL DEN.
 $\Rightarrow L = \frac{\text{COEF. PRINCIPAL DEL NUM.}}{\text{COEF. PRINCIPAL DEL DEN.}}$

$$\therefore L = \frac{1}{1} = 1$$

02) SEA $f(n) = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{\infty}{\infty}$$

EN $f(n)$ DIVIDIMOS NUMERADOR (N) Y DENOMINADOR (D) POR 3^n :

$$f(n) = \frac{\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^n}}{\frac{2^n + 3^n}{3^n}} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n} + \frac{3^{n+1}}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n}}$$

$$f(n) = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

RECUERDE

$$\text{SIENDO } 0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

APLICANDO EN $f(n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{2(0) + 3}{0 + 1} = 3$$

03) HACEMOS $g(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty - \infty$$

RACIONALIZAMOS EN $g(n)$ (MULTIPLÍQUESE POR LA CONJUGADA)

$$g(n) = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$g(n) = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \frac{1}{\infty} = 0$$

04) Si $g(x) = \frac{2x+3}{x+3x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\infty}{\infty}$

EXTRAEMOS x DEL NUMERADOR (N)

y DENOMINADOR (D):

$$g(x) = \frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x(1 + \frac{1}{x^{2/3}})} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^{2/3}}}$$

AGUÍ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

05) Si $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$

TRANSFORMAMOS $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

AGUÍ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0 + 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

06) Si $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \frac{0}{0}$

FACTORIZAMOS EN $g(x)$:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

LUEGO:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$$

07) OBS: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{0}{0}$

LLAMAMOS: "L"

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + h^3 + 3xh(x+h) - x^3}{h}$$

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3xh(x+h)}{h}$$

EVALUANDO AGUÍ:

$$L = 0^3 + 3x(0+0) \therefore L = 3x^2$$

08) Si $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty - \infty$$

RACIONALIZANDO EN $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \left[1 - \frac{3}{1+x+x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{1-x} \left(\frac{x^2+x-2}{1+x+x^2} \right)$$

$$= \frac{-1}{x-1} \left(\frac{(x+2)(x-1)}{1+x+x^2} \right)$$

$$\sim g(x) = \frac{-(x+2)}{1+x+x^2}$$

Aquí:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{-(1+2)}{1+1+1} = -\frac{1}{3}$$

⑨) Si $h(x) = \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7} h(x) = \frac{0}{0}$

RACIONALIZANDO Y FACTORIZANDO
N y D RESPECTIVAMENTE:

$$h(x) = \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \cdot \frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}$$

$$h(x) = \frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$h(x) = \frac{-(x-7)}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}$$

Aquí:

$$\lim_{x \rightarrow 7} h(x) = \frac{-1}{(7+7)(2+2)} = -\frac{1}{56}$$

⑩) Sea $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$$

RACIONALIZANDO EN $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}$$

$$f(x) = \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

EVALUANDO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{\infty} = 0$$

⑪) Sea $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} xg(x) = \infty(\infty - \infty)$$

RACIONALIZANDO EN $g(x)$:

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)}$$

$$g(x) = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

LUEGO, LO PEDIDO ES:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

EVALUANDO

$$\text{Aquí, se tiene: } \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

⑫) Si $h(x) = x + 3\sqrt{1-x^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty - \infty$

RACIONALIZANDO EN $h(x)$:

$$h(x) = \frac{(x + 3\sqrt{1-x^3})(x^2 - x\sqrt{1-x^3} + 3\sqrt{1-x^3})}{(x^2 - x\sqrt{1-x^3} + 3\sqrt{1-x^3})}$$

$$\sim h(x) = \frac{x^3 + (1-x^3)}{x^2 - x\sqrt{1-x^3} + 3\sqrt{1-x^3}}$$

Aquí: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{1}{\infty + \infty + \infty}$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

13) RECUERDE

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(cx) \\ & \forall c \neq 0 \\ \text{(II)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}$$

OB: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \frac{0}{0}$

ACÁ, PODEMOS ESCRIBIR:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) \cdot 3 \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \end{aligned}$$

Por (I):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3(1) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{5}{2}$$

15) Sea $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$

TRANSFORMANDO $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

Aquí:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= (1)^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

14) OB: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{0}{0}$

TRANSFORMANDO AQUÍ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \right]$$

$$= \frac{5}{2} \left[\frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)} \right] = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}$$

16) RECUERDE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$$

EN EL PROBLEMA:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1+h)^2}{\sin[\pi(1+h)]}$$

LLAMAMOS L

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1+h)^2}{\sin \pi(1+h) + \cos \pi \cdot \sin \pi h}$$

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{\sin \pi h}$$

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h}{\left(\frac{\sec \pi h}{\pi h}\right) \pi}$$

$$L = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2+h}{\pi}\right)}{\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sec \pi h}{\pi h}\right)} = \frac{\frac{2}{\pi}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec h}{h}}$$

$$\therefore L = \frac{2/\pi}{1} = \frac{2}{\pi}$$

(17) Sea $f(h) = \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \frac{0}{0}$$

POR TRIGONOMETRÍA:

$$\sec A - \sec B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sec\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

APLICANDO EN $f(h)$:

$$f(h) = \frac{2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sec\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

AQUÍ, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$f(h) = \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \frac{\sec\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

LUEGO:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

$$= \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec h}{h}}_{\text{VALE 1}}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \cos x$$

(18) APLICANDO EL "RECUERDE" DE LA RESOLUCIÓN (16) (REVISE), SE TIENE:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} = ?$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(2+h) - \sec 2}{h}$$

ESTO SE HA CALCULADO EN EL PROB. ANTERIOR

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} = \cos a$$

NOTA: LO QUE SE HACE ES:

$x = a + h$; DE AQUÍ, COMO $x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

(19) SE CONJUCE QUE:

$$0 \leq \left| \sec\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1; \forall x \neq 0$$

MULTIPLICADO POR $|x|$:

$$0 \leq \left| x \sec\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

DE AQUÍ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

✦ POR EL TEOREMA DEL SANDWICH:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sec\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$$

O TAMBIÉN:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sec\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \sec\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

20) Sea $f(x) = (1-x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \cdot \infty$

TENIENDO EN CUENTA EL "RECUERDE" DE LA RESOLUCIÓN (16), LO QUE NOS PUEDE HOLLAR, EQUIVALE A CALCULAR:

$L = \lim_{h \rightarrow 0} [(-h) \tan \frac{\pi}{2}(1+h)]$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[(-h) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}h\right)} \right]$

$= \lim_{h \rightarrow 0} (-h) \left[\frac{\overbrace{\sin \frac{\pi}{2}}^1 \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}h}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cdot \overbrace{\sin \frac{\pi}{2}h}^0}{\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}h}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}h}_{\rightarrow 0}} \right]$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(-h) \cos \frac{\pi}{2}h}{-\sin \frac{\pi}{2}h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}h}{\left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}\right) \cdot \frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow L = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2}h}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}} = \frac{2}{\pi}$

$L = \frac{\cos 0}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$

21) Sea $g(x) = \frac{x - \sec x}{x + \sec 3x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{0}{0}$

TRANSFORMANDO $g(x)$:

$g(x) = \frac{x - \sec x}{x + \sec 3x} = \frac{1 - \frac{\sec x}{x}}{1 + \left(\frac{\sec 3x}{3x}\right)3}$

Aquí:

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{x}}{1 + 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sec 3x}{3x}}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1-1}{1+3(1)} = \frac{0}{4}$

22) RECUERDE

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Sea $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$

TRANSFORMANDO EN $f(x)$:

$f(x) = \left(\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\right)^x = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$

Luego:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{-1}$

23) Sea $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+x}{3-x}\right)^x$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{3+0}{3-0}\right)^0 \therefore L = \frac{1}{1}$$

24) RECUERDE

GENERALIZANDO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

SEA $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

TRANSFORMAMOS $f(x)$, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$f(x) = \left(\frac{(x+3)-4}{x+3}\right)^{(x+3)-1}$$

DE AQUÍ:

$$f(x) = \frac{\left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)^{x+3}}{\left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)}$$

LUEGO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\lim_{x+3 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)^{x+3}}{\lim_{x+3 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{e^{-4}}{1} = \frac{1}{e^4}$$

25) NOS PIDEN: $L = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sec x)^{\frac{1}{\sec x}}$

EVALUANDO: $L = 1^{\infty}$

TRANSFORMANDO L :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \sec x)^{\frac{1}{\sec x}} \right]^{\frac{\sec x}{x}}$$

OJO: COMO $x \rightarrow 0 \Rightarrow \sec x \rightarrow 0$

EN L :

$$L = \left[\lim_{\sec x \rightarrow 0} (1 + \sec x)^{\frac{1}{\sec x}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{x}}$$

VALE 1

CONOCIDO: e

$$\therefore L = e^1 = e$$

26) NOS: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(2+1)x+2}{x^3-2^3} = \frac{0}{0}$

FACTORICEMOS NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA FRACCIÓN (BÚSQUESE FACTOR $x-2$)

$$x^2(2+1)x+2 \equiv (x-2)(x-1)$$

$$\begin{array}{cc} x & \nearrow & -2 \\ x & \searrow & -1 \end{array}$$

$$x^3-2^3 \equiv (x-2)(x^2+2x+2^2)$$

LUEGO:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2+2x+2^2)}$$

EVALUANDO:

$$L = \frac{2-1}{2^2+2^2+2^2} \therefore L = \frac{2-1}{3 \cdot 2^2}$$

27) Si $g(x) = \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-x^2-12x+20}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{0}{0}$$

FACTORICEMOS N y D EN $g(x)$

$$N = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x=2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ & \downarrow & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} N &= (x-2)(x^2+x-6) \\ &= (x-2)(x-2)(x+3) \\ \rightarrow N &= (x-2)^2(x+3) \end{aligned}$$

$$D = x^3 - x^2 - 12x + 20$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x=2 & 1 & -1 & -12 & 20 \\ & \downarrow & 2 & 2 & -20 \\ \hline & 1 & 1 & -10 & 0 \end{array}$$

$$D = (x-2)(x^2+x-10)$$

$$g(x) = \frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)(x^2+x-10)} = \frac{(x-2)(x+3)}{x^2+x-10}$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{(0)(5)}{(-4)} = 0$$

$$(28) \text{ HACEMOS: } f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1-2x}}{x+x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

TRANSFORMAMOS $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1) - (\sqrt{1-2x} - 1)}{x+x^3}$$

$$f(x) = \frac{\frac{(1+x^2)-1}{\sqrt[3]{1+x^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} - \frac{(1-2x)-1}{\sqrt{1-2x} + 1}}{x+x^3}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-2x} + 1}}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

EVALUANDO AQUÍ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{1} + \frac{2}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$(29) \text{ SEA } h(x) = \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{8-x}}{3x-2\sqrt{15-3x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{0}{0}$$

RACIONALIZAMOS $h(x)$:

$$h(x) = \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{8-x}}{3x-2\sqrt{15-3x}} \cdot \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{8-x}}{\sqrt{3x} + \sqrt{8-x}} \cdot \frac{3x+2\sqrt{15-3x}}{3x+2\sqrt{15-3x}}$$

$$h(x) = \frac{(3x-8+x)(3x+2\sqrt{15-3x})}{[9x^2-4(15-3x)](\sqrt{3x} + \sqrt{8-x})}$$

$$h(x) = \frac{4(x-2)(3x+2\sqrt{15-3x})}{3(3x+10)(x-2)(\sqrt{3x} + \sqrt{8-x})}$$

$$\text{Aquí: } \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{4(6+6)}{3(16)(2\sqrt{6})} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

RACIONALIZANDO:

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

30) HACEMOS: $K(x) = \frac{2x^{2n} + 1 - 3x^{-2n}}{3x^{2n} - 5 + 2x^{-2n}}$

oB: $K(x) = \frac{2x^{2n} + 1 - \frac{3}{x^{2n}}}{3x^{2n} - 5 + \frac{2}{x^{2n}}}$

DE AQUÍ: $K(x) = \frac{2x^{4n} + x^{2n} - 3}{3x^{4n} - 5x^{2n} + 2}$

AQUÍ:

$\lim_{x \rightarrow 0} K(x) = \frac{0+0-3}{0-0+2} = -\frac{3}{2}$

31) CALCULEMOS LOS LÍMITES LATERALES EN: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

(i) Si $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow |x| = x$

LUEGO:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

(ii) Si $x \rightarrow 0^- \Rightarrow |x| = -x$

LUEGO:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$

OBSÉRVESE:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$, NO EXISTE

32) NOS PIDEN: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] + 1}{x - 1}$

oB: Si $x \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = 0$

DEJA QUE NOS PIDEN:

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] + 1}{x-1} = -2$

33) Sea $f(x) = \csc x - \cot x$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty - \infty$

TRANSFORMANDO $f(x)$:

$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

Por TRIGONOMETRÍA:

$f(x) = \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$

$\Rightarrow f(x) = \tan \frac{x}{2}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \tan 0 = 0$

34) CORRECCIÓN

DEBE DECIR: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4}$

DIRECTAMENTE:

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} = \frac{4}{0} = \infty$

$$(25) L = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{t+2}{t^2-4} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{1}{t-2}$$

$$\text{OBS: } t < 2 \Rightarrow t-2 < 0$$

CON ESTO:

$$L = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$(26) \text{ SEA } L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t+1} - 1}{\sqrt{t+1} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\text{HAGAMOS: } t+1 = x^6 \Rightarrow x = \sqrt[6]{t+1}$$

$$\text{OBS: } \text{Si } t \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 1$$

LUEGO:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^6} - 1}{\sqrt{x^6} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1+1}{1+1+1}$$

$$\therefore L = \frac{2}{3}$$

$$(27) \text{ NOS PIDEN } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - x}{3 - x}$$

$$\text{OBS: } \text{Si } x \rightarrow 3^- \text{ (X SE APROXIMA A 3 POR LA IZQUIERDA)}$$

$$\Rightarrow [x] = 2$$

OSEA QUE NOS PIDEN:

$$L = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - x}{3 - x}$$

$$\text{OBS: } x < 3 \Rightarrow 3 - x > 0$$

$$\text{CON ESTO: } L = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$(28) \text{ NOS PIDEN: } L = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x^2}{9 - x^2}$$

$$\text{OBS: } \text{Si } x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$$

$$\Rightarrow 9 - x^2 > 0$$

$$\text{CON ESTO: } L = \frac{4 \cdot 9}{0^+} = +\infty$$

$$(29) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{3+0^2}}{0^-}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = -\infty$$

$$(30) \text{ SEA } f(x) = \frac{2x^2 - 4}{5x + 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

APLICANDO EL TEOREMA INDICADO AL INICIO (REVISE):

$$\text{OBS: } \text{GRADO DEL N} > \text{GRADO DEL D}$$

$$\text{Y ADEMÁS: } \frac{2}{5} > 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

41) NOS PIDEN: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x^2 - 1}$

Obs: Si $x \rightarrow 1^- \Rightarrow 0 < x < 1$

DE AQUÍ: $0 < x^2 < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0$

OSEA QUE:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x^2 - 1}$$

Obs: Si $x < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0$

CON ESTO:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

42) LO PEDIDO, LO ESCRIBIMOS:

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{t+2}{t^2-4} = \lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{1}{t-2}$$

Obs: Si $t > 2 \Rightarrow t-2 > 0$

CON ESTO:

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{t+2}{t^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

43) EVALUANDO DIRECTAMENTE:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{0^+}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = +\infty$$

44) SEA $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 3^+ \\ x > 3}} f(x) = \frac{0}{0}$$

TRANSFORMANDO $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$$

Aquí:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3^+ \\ x > 3}} f(x) = \frac{\sqrt{6}}{0^+} = +\infty$$

45) Si $f(x) = \frac{5x^3 - 12x + 7}{4x^2 - 1}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty} \dots (\alpha)$$

OBSÉRVESE:

GRADO DEL N > GRADO DEL D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \bigcirc \infty$$

↑ SIGNO

PERO TENIENDO EN CUENTA (α) , VÉASE SU SIGNO; CON-

CLUYO:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

46) SEA $S = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

EVALUANDO: $S = \infty - \infty$

TRANSFORMANDO:

$$S = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$47) \text{ Sea } S(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

OBSÉRVESE EN S:

GRADO DEL N = GRADO DEL D

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{\text{COEF. PRINC. DEL N}}{\text{COEF. PRINC. DEL D}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{1}{1} = 1$$

$$48) \text{ Sea: } N(x) = x^n + 2x - 1$$

$$\text{y } D(x) = x^2 + 6x + 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{D(x)} = 1$$

\Rightarrow SE DEBE CUMPLIR:

GRADO N(x) = GRADO D(x)
(DONDE SUS COEFICIENTES PRINCIPALES SON IGUALES)

$$\therefore n = 2$$

$$49) \text{ Sea: } h(x) = \frac{(x+1)^3(x+3)^4}{(x+2)(x+1)^5}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

OBSERVÓ EN h(x):

GRADO DEL N > GRADO DEL D

APLICANDO EL TEOREMA INDICADO AL INICIO (REVISE), SE

$$\text{TIENE: } \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$$

$$50) \text{ Sea } g(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2(x+3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

OBSERVÓ EN g(x):

GRADO DEL N < GRADO DEL D

APLICANDO EL TEOREMA INDICADO AL INICIO (REVISE), SE TIE-

$$\text{NE: } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

XIX

CAPÍTULO

Álgebra

01 RECUERDE

$$\text{Si } f(x) = g(x) + h(x) \\ \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

APLICANDO:

$$\text{Si } y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2 \\ \Rightarrow y' = (x^3)' - (5x^2)' + (7x)' - (2)'$$

$$y' = 3x^2 - 10x + 7$$

DERIVANDO NUEVAMENTE:

$$y'' = (3x^2)' - (10x)' + (7)'$$

$$y'' = 6x - 10$$

OTRA VEZ:

$$y''' = (6x)' - (10)'$$

$$\therefore y''' = 6$$

02 RECUERDE

$$\text{Si } f(x) = [g(x)]^n \\ \Rightarrow f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

APLICANDO:

$$\text{Si } f(x) = (2x-3)^5 \\ \Rightarrow f'(x) = 5(2x-3)^4 \cdot (2x-3)' \\ = 5(2x-3)^4 [(2x)' - (3)'] \\ = 5(2x-3)^4 (2) \\ \therefore f'(x) = 10(2x-3)^4$$

ADemás:

$$\text{Si } f(x) = k[g(x)]^n; k \in \mathbb{C} \text{ E.} \\ \Rightarrow f'(x) = kn[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

En (x):

$$f''(x) = 10 \cdot 4 (2x-3)^3 (2x-3)' \\ = 40 (2x-3)^3 (2)$$

$$\therefore f''(x) = 80 (2x-3)^3$$

DERIVANDO NUEVAMENTE:

$$f'''(x) = 80 \cdot 3 (2x-3)^2 (2)$$

$$\therefore f'''(x) = 480 (2x-3)^2$$

$$\therefore f'''(3) = 480 (3)^2 = 4320$$

$$03 \text{ Si } f(x) = \text{sen } 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos 2x \cdot (2x)'$$

$$f'(x) = 2 \cos 2x$$

DERIVANDO NUEVAMENTE:

$$f''(x) = 2 (\cos 2x)'$$

$$= 2 (-\text{sen } 2x) (2x)'$$

$$\therefore f''(x) = -4 \text{sen } 2x$$

UNA VEZ MÁS:

$$f'''(x) = -4 (\text{sen } 2x)'$$

$$= -4 (2 \cos 2x)$$

$$\therefore f'''(x) = -8 \cos 2x$$

$$\therefore f'''(3) = -8 \cos 6$$

04 RECUERDE

$$\text{Si } f(x) = g(x) \cdot h(x) \\ \Rightarrow f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

APLIQUEMOS:

$$\text{Si } f(x) = e^x \cdot \sin x \\ \Rightarrow f'(x) = e^x (\sin x)' + \sin x (e^x)' \\ = e^x \cos x + \sin x \cdot e^x \\ \Rightarrow f'(x) = e^x (\cos x + \sin x)$$

DERIVANDO:

$$f''(x) = e^x (\cos x + \sin x)' + (\cos x + \sin x) (e^x)' \\ = e^x (-\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x) \cdot e^x \\ = e^x (-\sin x + \cos x + \cos x + \sin x) \\ \Rightarrow f''(x) = 2e^x \cos x$$

$$\text{Aquí: } f''(0) = 2(1)(1) = 2$$

05 $x = 100 + 5t - 0,001t^3$ (DATO)

DERIVEMOS PARA CALCULAR LA VELOCIDAD:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(100 + 5t - 0,001t^3)$$

$$v = \frac{d}{dt}100 + \frac{d}{dt}5t - \frac{d}{dt}0,001t^3$$

$$v = 0 + 5 - 0,003t^2$$

DERIVEMOS PARA CALCULAR LA ACCELERACIÓN:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}5 - \frac{d}{dt}(0,003t^2)$$

$$\rightarrow a = 0 - 0,006t$$

$$a = -0,006t$$

Para $t = 1$, SE TIENE:

$$\therefore a = -0,006$$

06 APLIQUEMOS EL "RECUERDE" DE LA RESOLUCIÓN 02

$$* y = (1-x)^{-1}$$

DERIVEMOS SUCESIVAMENTE:

$$* y' = (-1)(1-x)^{-2} \cdot (1-x)' \\ = (-1)(1-x)^{-2}(-1)$$

$$\Rightarrow y' = 1(1-x)^{-2}$$

$$\text{DE AQUÍ: } y'' = 1(-2)(1-x)^{-3}(-1)$$

$$\Rightarrow y'' = 1 \times 2(1-x)^{-3}$$

$$\text{DE AQUÍ: } y''' = 1 \times 2(-3)(1-x)^{-4}(-1)$$

$$\Rightarrow y''' = 1 \times 2 \times 3(1-x)^{-4}$$

⋮

DE ACUERDO A LO OBTENIDO PODEMOS DECIR:

$$y^n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n (1-x)^{-(n+1)}$$

$$\therefore y^n = n! (1-x)^{-(n+1)}$$

07 DATO: $y = \cos 2x$

$$* y' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$$

$$\rightarrow y'_0 = -2(0) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -2 \cos 2x \cdot (2x)' = -4 \cos 2x$$

$$\rightarrow y'' = -4(1) = 4 \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -4(-\sin 2x)(2x)' = 8 \sin 2x$$

$$\rightarrow y''' = 8(0) = 2^3 \sin 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)} = 8 \cos 2x \cdot (2x)' = 16 \cos 2x$$

$$\rightarrow y^{(4)} = 16(1) = 2^4 \cos 4\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

⋮

SEGÚN LA LEY DE FORMACIÓN, CONCLUIRÍAMOS:

$$y_0^n = 2^n \cos n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

08) DE $x^4 - xy + y^4 = 1$

LOS PIDEN y' CUANDO $x=0$ Y

$y=1$. DERIVAMOS AMBOS MIEMBROS (DERIVACIÓN IMPLÍCITA):

$$4x^3 - (xy' + y) + 4y^3 y' = 0$$

AHORA, PARA $x=0$, $y=1$; SE TIENE:

$$0 - (0 + 1) + 4y' = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } y' = \frac{1}{4}$$

09) OBT: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty}$

♦ APLICANDO L'HOSPITAL:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\cot x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sec^2 x}{x} \cdot \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\left(\frac{\sec x}{x}\right)^2 x$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{x}\right)^2}_1 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} x}_0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x} = 0$$

10) OBT: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sec x}{x^3} = \frac{0}{0}$

♦ APLICANDO L'HOSPITAL:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sec x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sec x)'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-\sin x) + \cos x(1) - \sec x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \text{LO PEDIDO VALE: } -\frac{1}{3}$$

11) OBT: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sec \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$

APLICANDO L'HOSPITAL:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sec \frac{\pi x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)'}{(1-\sec \frac{\pi x}{2})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\cos \frac{\pi x}{2} \cdot (\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{2}} = \frac{-1}{0} = \infty \end{aligned}$$

⑫ Obj: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sec x}{x - \sec x} = \frac{0}{0}$

APLIQUEMOS L'HOSPITAL:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sec x}{x - \sec x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sec x)'}{(x - \sec x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

TRANSFORMEMOS EN E:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} \\ &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x (1 - \cos x)} \\ E &= \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

LUEGO: $\cos^2 x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sec x}{x - \sec x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1 + 1 + 1 = 3$$

∴ LO PEDIDO VALE: 3

⑬ Obj: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x} = \frac{0}{0}$

APLICAMOS L'HOSPITAL:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sec^2 x - 2 \tan x)'}{(1 + \cos 4x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec x \cdot \sec x \cdot \tan x - 2 \sec^2 x}{-4 \sin 4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 x (\tan x - 1)}{-4 \sin 4x} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 x (\tan x - 1)'}{(-4 \sin 4x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 x (1 + \tan^2 x)}{-8 \cos 4x} \end{aligned}$$

DERIVAMOS NUEVAMENTE:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{[2 \sec^2 x (\tan x - 1)]'}{[-8 \cos 4x]'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec x (2 \sec x \tan x + (\tan x - 1) \cdot 2 \sec x)}{-8 \sin 4x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \sec x \tan x (\sec x + \tan x - 1)}{-8 \sin 4x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \sec x \tan x (\sec x + \tan x - 1)}{-8 \sin 4x} \end{aligned}$$

EVALUANDO SE TIENE:

$$L = \frac{\sec^4 \frac{\pi}{4}}{-8 \cos \pi} = \frac{(\sqrt{2})^4}{-8(-1)} = \frac{2^2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore L = \frac{1}{2}$$

14) LA EXPRESIÓN ES DE LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$
 SEA $x = \frac{\pi}{2} + h$; SI $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow h \rightarrow 0$

LUEGO: $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(\frac{\pi}{2} + h)}{\tan(\frac{5\pi}{2} + 5h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cot h}{-\cot 5h}$

$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h \cdot (\sin 5h)}{(\sin h) \cdot \cos 5h}$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$L = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cosh h \cdot \left(\frac{\sin 5h}{5h}\right) \cdot 5}{\cos 5h \cdot \left(\frac{\sin h}{h}\right)} \right]$

EVALUANDO

$L = \frac{1}{1} \cdot \frac{1 \cdot 5}{1} \therefore L = 5$

15) OBS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5} = \frac{\infty}{\infty}$

APLICANDO L'HOSPITAL:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{5x^4} = \frac{\infty}{\infty}$

DERIVANDO NUEVAMENTE:

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{5x^3} = \frac{\infty}{\infty}$

OTRA VEZ:

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{60x^2} = \frac{\infty}{\infty}$

UNA VEZ MÁS:

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{120x} = \frac{\infty}{\infty}$

POR ÚLTIMO:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{120} = \frac{\infty}{\infty}$

16) OBS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

APLICANDO L'HOSPITAL:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^{1/3})'}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \frac{0}{\infty}$

17) OBS: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{\infty}{\infty}$

SEA I

TRANSFORMANDO:

$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x} \cdot \sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$L = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\frac{\pi}{2} x}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\pi} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_1$$

$$\Rightarrow L = \frac{\pi}{2} \cdot \pi \cdot 1 = \frac{\pi^2}{2}$$

(18) Obs: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)} = \frac{-\infty}{-\infty}$

LO LLAMAMOS L

APLICANDO L'HOSPITAL:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin mx))'}{(\ln(\sin x))'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos mx)(m)}{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\sin mx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin mx}$$

DE AQUÍ: $L = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

(19) Obs: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = 0 \cdot \infty$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

APLICANDO L'HOSPITAL:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\tan x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\sin x)}{\sec^2 x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \frac{0}{1} = 0$$

(20) RECUERDE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

EN EL PROBLEMA, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x}$$

PERO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$\therefore \text{LO PEDIDO VALE: } 1 - 0 = 1$$

(21) DE $\frac{e^x}{1+x} \geq k \dots (x)$

SEA: $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

$$f'(x) = \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x \cdot x}{(1+x)^2} = 0$$

DE AQUÍ: $x=0$, SIENDO ÉSTE UN VALOR EXTREMO DE $f(x)$ y $f(0)=1$

ANALICEMOS EN TRES INTERVALOS:

$$(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$a) \text{ obs: } f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1)$$

$\Rightarrow f(x)$ ES DECRECIENTE

$$\text{DONDE: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow f$ NO TIENE VALOR MÍNIMO

$$b) \text{ obs: } f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 0)$$

$\Rightarrow f(x)$ ES DECRECIENTE; DONDE:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

obs: $f(x)$ TIENE UN VALOR MÍNIMO PARA $x=0$

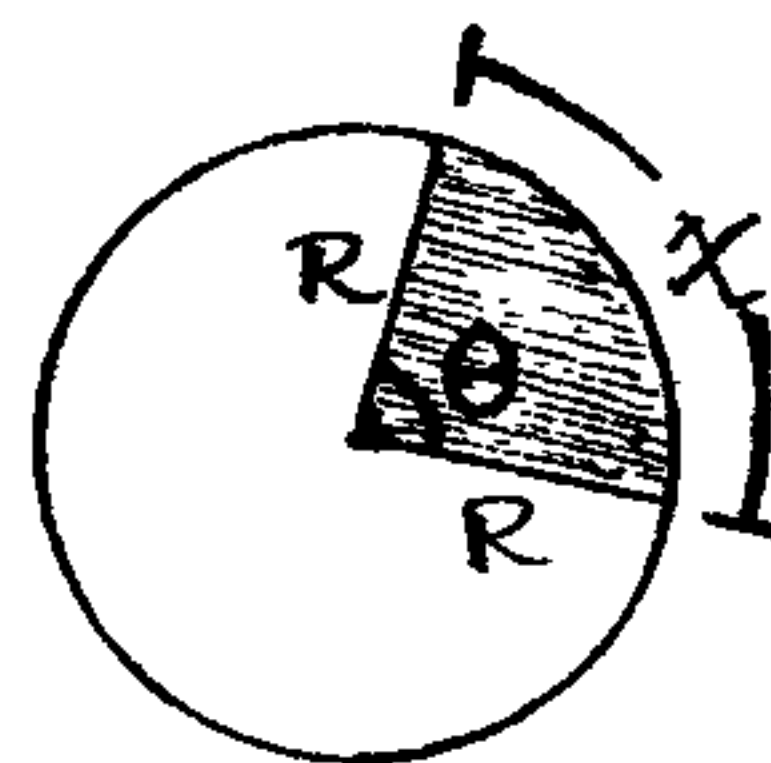
$$c) \text{ obs: } f'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow f(x)$ ES CRECIENTE

ACÁ TAMBIÉN TIENE VALOR MÍNIMO PARA $x=0$, DONDE $f(0)=1$.

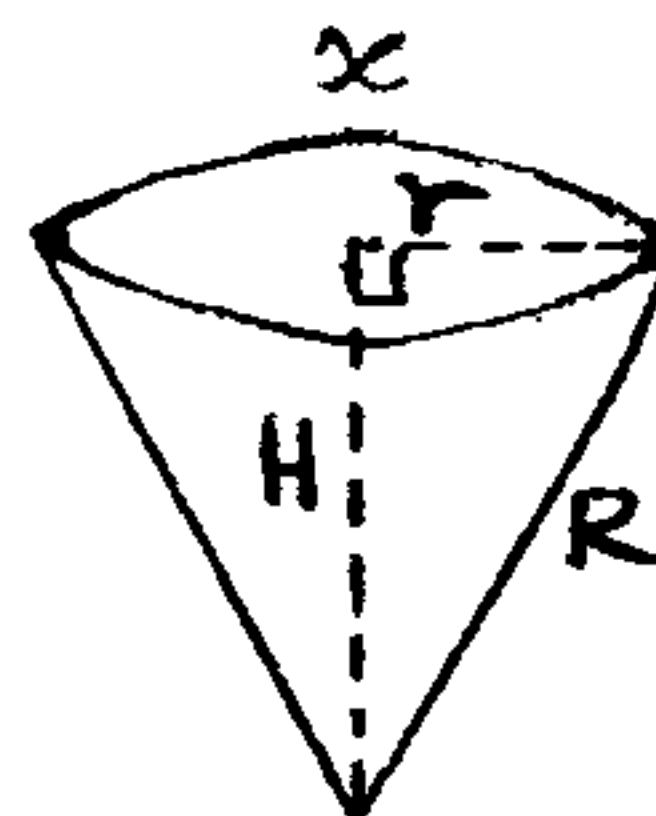
$$\Rightarrow \frac{e^x}{1+x} \geq 1; \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\therefore K_{\text{MÁXIMO}} = 1$$



$\theta = ?$

FORMANDO EL EMBUDO (SE GENERA UN CONO), ASÍ:



obs: LA LONGITUD DE LA BOCA (CIRCUNFERENCIA) DEL EMBUDO (CONO) ES x

$$\Rightarrow x = 2\pi r \quad (B)$$

ADemás, POR PITÁGORAS: $H = \sqrt{R^2 - r^2}$

AHORRA, EL VOLUMEN DEL CONO:

$$V_C = \frac{\pi}{3} r^2 H \rightarrow V_C = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

DERIVEMOS PARA MAXIMIZAR:

$$V'_C = \frac{\pi}{3} [2r \sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2r}{\sqrt{R^2 - r^2}}] = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } r[2(R^2 - r^2) - r^2] = 0$$

$$\text{DONDE: } r^2 = \frac{2R^2}{3} \rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$$

$$(B) \text{ EN } (A): \theta = \frac{2\pi r}{R}$$

$$\text{DE AQUÍ: } \theta = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$$

22) ASUMAMOS QUE "x" SEA LA LONGITUD DE ARCO (UEGO DE CORTAR EL SECTOR CIRCULAR) QUE SE USA PARA FORMAR EL EMBUDO.

DE LA FIG. (SIGUIENTE COLUMNA)

$$R = 2 \text{ (DATO)} \quad x = \theta R$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{x}{R} \quad (A)$$

$$23) \text{ obs: } f(x) = y = \frac{1}{1+x^2}$$

LA PENDIENTE EN CUALQUIER PUNTO DE LA CURVA, VIENE DADO POR LA DERIVADA DE f .

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

AHORA, HALLENOS EL VALOR DE x PARA EL CUAL " m " ES MÁXIMO:

$$m(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \text{ (DERIVEMOS RESPECTO A } x \text{)}$$

$$m'(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) - (-2x)2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$\text{DE AQUÍ: } m'(x) = 0$$

$$-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2) = 0$$

EFFECTUANDO:

$$x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{CON ESTO: } f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{LOS PUNTOS: } \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}\right)$$

DE CONCAVIDAD HACIA ABAJO DE LA CURVA $y = \frac{1}{x+3}$, SE TIENE

QUE RESOLVER: $y'' < 0$

$$\text{OBSÉRVESE: } y' = -\frac{1}{(x+3)^2}$$

DERIVANDO OTRA VEZ:

$$y'' = -\frac{(-2(x+3)(1))}{(x+3)^4}$$

DE AQUÍ:

$$\frac{2(x+3)}{(x+3)^4} < 0 \rightarrow x+3 < 0$$

$$\text{DONDE: } x < -3$$

CON ESTO:

LA CURVA $y = \frac{1}{x+3}$ ES CONCAVA HACIA ABAJO EN EL

INTERVALO $(-\infty; -3)$

24) DE $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4 \dots (x)$ PARA DETERMINAR LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN, HALLENOS y'' :

$$\rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 12$$

DERIVANDO NUEVAMENTE:

$$y'' = 6x - 12$$

$$\text{AQUÍ: } y'' = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{EN } (x): y = 8 - 24 + 24 + 4$$

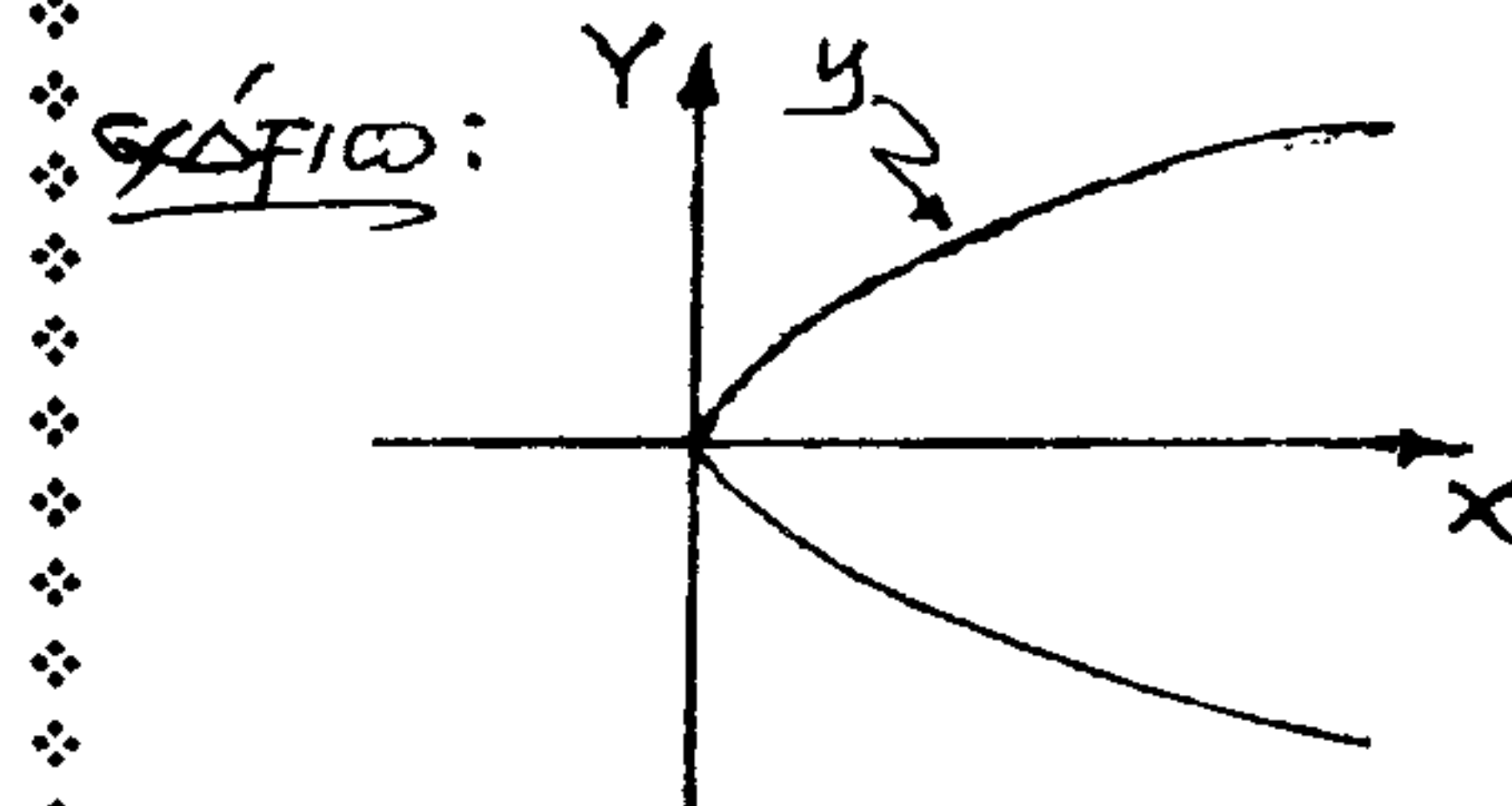
$$\rightarrow y = 12$$

$\therefore (2; 12)$ ES UN PUNTO DE INFLEXIÓN

26) LA RELACIÓN $y^2 = x^3$ ES SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE x .

$$\text{DE } y^2 = x^3 \rightarrow y = \pm \sqrt{x^3}$$

OBSÉRVESE QUE $x \geq 0$



DE LA GRÁFICA, PODEMOS DECIR QUE NO EXISTE

" y " MÁXIMO

25) PARA HALLAR UN INTERVALO

27) DE $y = A \operatorname{Sen} 3x + B \operatorname{Cos} 3x$
SE TIENE:

$$y' = A \operatorname{Cos} 3x \cdot (3) + B(-\operatorname{Sen} 3x) \cdot (3)$$

$$y' = 3A \operatorname{Cos} 3x - 3B \operatorname{Sen} 3x$$

DERIVANDO AQUÍ:

$$y'' = 3A(-\operatorname{Sen} 3x)(3) - 3B(\operatorname{Cos} 3x)(3)$$

$$y'' = -9A \operatorname{Sen} 3x - 9B \operatorname{Cos} 3x$$

REEMPLAZANDO EN LA IGUALDAD
DADA:

$$-9A \operatorname{Sen} 3x - 9B \operatorname{Cos} 3x + 2$$

$$4(3A \operatorname{Cos} 3x - 3B \operatorname{Sen} 3x) + 2$$

$$3(A \operatorname{Sen} 3x + B \operatorname{Cos} 3x) = 10 \operatorname{Cos} 3x$$

EFFECTUANDO:

$$-9A \operatorname{Sen} 3x - 9B \operatorname{Cos} 3x + 12A \operatorname{Cos} 3x$$

$$-12B \operatorname{Sen} 3x + 3A \operatorname{Sen} 3x + 3B \operatorname{Cos} 3x$$

$$= 10 \operatorname{Cos} 3x$$

REDUCIENDO:

$$-(12B + 6A) \operatorname{Sen} 3x + (12A - 6B) \operatorname{Cos} 3x$$

$$= 10 \operatorname{Cos} 3x$$

DE AQUÍ, IDENTIFICANDO:

$$\begin{cases} 12B + 6A = 0 \\ 12A - 6B = 10 \end{cases} \text{ RESOLVIENDO:}$$

$$A = \frac{2}{3} \wedge B = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore A - B = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\text{EFFECTUANDO: } f'(x) = \frac{2d-bc}{(cx+d)^2}$$

LUEGO:

$$f'(x) = \frac{2d-bc}{(cx+d)^2} = \frac{2d-bc-2d+bc}{(cx+d)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2d-bc}{(cx+d)^2} = 0$$

29) POR CONCEPTOS DE DERIVADA
UNA DE LAS FUNCIONES f CUYA
DERIVADA ES $f'(x) = \operatorname{Sen} x$, PUE-
DE SER $f(x) = -\operatorname{Cos} x$; PERO.....
NO ES LA ÚNICA PORQUE EXISTEN

OTRAS FUNCIONES CON LA MISMA
PROPIEDAD. POR EJEMPLO:

$$f(x) = -\operatorname{Cos} x + 1; f(x) = -\operatorname{Cos} x + \frac{1}{3};$$

$$f(x) = -\operatorname{Cos} x + \pi; f(x) = -\operatorname{Cos} x - e$$

...; EN GENERAL: $f(x) = -\operatorname{Cos} x + C$
DONDE "C" ES UNA CONSTANTE AR-
BITRARIA.

\therefore EXISTEN INFINITAS FUNCIONES

$$30) \text{ DE } f(x+3) = x^5$$

$$\text{HACEMOS } x+3 = y \rightarrow x = y-3$$

$$\Rightarrow f(y) = (y-3)^5$$

CAMBIANDO Y POR X:

$$f(x) = (x-3)^5$$

$$\text{DONDE: } f'(x) = 5(x-3)^4(1)$$

$$\therefore f'(x) = 5(x-3)^4$$

$$28) \text{ Si } f(x) = \frac{2x+b}{cx+d}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(cx+d)(2) - (2x+b)(c)}{(cx+d)^2}$$

CAMBIANDO Y POR X:

$$f(x) = (x-3)^5$$

$$\text{DONDE: } f'(x) = 5(x-3)^4(1)$$

$$\therefore f'(x) = 5(x-3)^4$$

31) OBT: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$

APLIQUEMOS L'HOSPITAL (DERIVEMOS NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA FRACCIÓN):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3}$$

$$= \frac{3(1)^2 + 1}{2(1) - 3} = \frac{4}{-1} = -4$$

32) DATO: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = M$

NOSE PIDE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} = L$

HACEMOS: $bx = y \rightarrow x = \frac{y}{b}$

OBT: Si $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$

LUEGO:

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{\frac{y}{b}} = \lim_{y \rightarrow 0} b \frac{f(y)}{y}$$

$$= b \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y}$$

"CAMBIANDO y POR x (NO CAMBIA NADA ES "MUDA"):

$$\Rightarrow L = b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \rightarrow \text{DATO}$$

$$\therefore L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} = bM$$

33) ANALICEMOS CADA PROPOSICIÓN:

RECUERDE

$$(\log_a f(x))' = \frac{\log_e e}{f(x)} \cdot [f(x)]'$$

a) Sea $y = 2^x \rightarrow x = \log_2 y$

INTERCAMBIANDO x POR y SE

TIENE:

$$y = f(x) = \log_2 x$$

DERIVANDO (APLIQUE EL RECUERDE)

$$(f(x))' = (\log_2 x)' = \frac{\log_e e}{x} = \frac{1}{x} \log_e e$$

$$\Rightarrow (a) \text{ es } \underline{V}$$

b) $f(x) = \log_3 g(x)$

SEGÚN EL RECUERDE:

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \log_3 e \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow (b) \text{ es } \underline{F}$$

c) RECUERDE

$$(\sec f(x))' = \sec f(x) \cdot f'(x)$$

Sea $f(x) = \sec(x^4)$

$$f'(x) = \sec(x^4) \cdot (x^4)'$$

1, 2, 3

0 TAMBIÉN:

$$f'(x) = 4x^3 \sec(x^4)$$

$$\therefore \underline{VFV}$$

34) Sea: $f(x) = x^2 g(x) + g'(x)$

$$g'(x) = 5x^2 + 2x$$

DE (2): $g(x) = (5x^n + 2x)^{1/4}$

$\rightarrow g'(x) = \frac{1}{4}(5x^n + 2x)^{-3/4} \cdot (5nx^{n-1} + 2)$

EN (1): $f(x) = x^2(5x^n + 2x)^{1/4}$
 $+ \frac{1}{4}(5x^{2n} + 2x)(5nx^{n-1} + 2)$

DERIVANDO:

$f'(x) = x^2 \cdot \frac{1}{4}(5x^n + 2x)^{-3/4} (5nx^{n-1} + 2)$
 $+ (5x^n + 2x)^{1/4} (2x) + \frac{1}{4}[(5x^n + 2x)$
 $[5n(n-1)x^{n-2}] + (5nx^{n-1} + 2)(5nx^{n-1} + 2)]$

Aquí:

$f'(0) = 0 + 0 + \frac{1}{4}[0 + (2)(2)]$

$\therefore f'(0) = \frac{1}{4}[4] = \frac{1}{1}$

35) RECUERDE

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = L$

ESTE PROCEDIMIENTO RECIBE EL NOMBRE DE REDUCCIÓN DEL LÍMITE DE a A 0. EN LA PRÁCTICA CONSISTE EN HACER EL CAMBIO DE VARIABLE: $x = a+h$, DE MODO QUE CUANDO $x \rightarrow a$, ENTONCES $h \rightarrow 0$ Y VICEVERSA.

POR TANTO, EN EL PROBLEMA:

Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = 4$

36) ANALICEMOS EN LOS INTERVALOS:

$<-\infty; 0> \cup [0; 5> \cup [5; +\infty)$

Si $x < 0 \rightarrow f_1(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{6-x}$

DERIVANDO:

$f'_1(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(6-x)^2}$

Obs: $f'_1(x) > 0, \forall x < 0$

LA FUNCIÓN ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE, OBTENIÉNDOSE UN VA

LOR MÁXIMO CUANDO $x \rightarrow 0$

Obs: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \frac{7}{6}$

Si $0 \leq x < 5 \rightarrow f_2(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6-x}$

DERIVANDO:

$f'_2(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(6-x)^2} = 0$

DONDE $x = 5/2$

Obs: $f'_2(x) < 0$, SI $0 \leq x < 5/2$

y $f'_2(x) > 0$, SI $5/2 < x < 5$

$\Rightarrow f_2(x)$ ES DECRECIENTE DE $[0; 5/2)$

y $f_2(x)$ ES CRECIENTE DE $(5/2; 5)$

EN $x = 5/2$ TIENE UN MÍNIMO

RELATIVO.

ASÍ, TIENE UN VALOR MÁXIMO

EN: $f(0) = \frac{7}{6}$ y OTRO VALOR

EXTREMO MÁXIMO CUANDO

$x \rightarrow 5$, DONDE $\lim_{x \rightarrow 5^-} f_2(x) = \frac{7}{6}$

(***) ANALICE UD. CUANDO $x > 5$

SE CONCLUYE QUE LA FUNCIÓN TIENE UN VALOR MÁXIMO PARA $x=0$ y $x=5$

DONDE: $f(0) = f(5) = \frac{7}{6}$

37) a) $y = 2x^2 + 5x + C$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = 2a + b \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 2a$

$\rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = 0 \quad \nabla (a) \text{ es } V$

b) Si $f(x) = x^2 - 4x + 3^x + \ln x$

Por propiedades (REVISE):

$f'(x) = 2x - 4 + 3^x \ln 3 + \frac{1}{x} \quad \nabla (b) \text{ es } V$

c) EL TEOREMA DICE:

Si una función es diferenciable en x_0 , es decir, si existe su derivada en x_0 , entonces la función es continua en x_0 . El recíproco no necesariamente se cumple. $\nabla (c) \text{ es } F$.

$\therefore VVF$

38) DATO: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$

$\nabla f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

RESOLVEMOS: $f'(x) = 0$

$\rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)(3x-1) = 0$

DE AQUÍ: $x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$

OBJ: TIENE MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO.

ADemás, VEMOS QUE: $f''(x) = 6x - 4$

Donde, para $x = 1$, se tiene:

$f''(1) = 2 > 0 \quad \nabla$ LA FUNCIÓN ES

CÓNCAVA HACIA ARRIBA, DONDE,

$x = 1$ ES UN MÍNIMO RELATIVO

PERO, $f(1) = 5 \quad \nabla (a; b) = (1; 5)$

ON ESTO: $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \dots (x)$

Donde: $g'(x) = 4x^3 - 10x$

AHORA, PARA HALLAR UN EXTREMO RE-

LATIVO, RESOLVEMOS: $g'(x) = 0$

$\rightarrow x(4x^2 - 10) = 0$

$x(2x + \sqrt{10})(2x - \sqrt{10}) = 0$

DE AQUÍ: $x = 0; x = -\frac{\sqrt{10}}{2}; x = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Si $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, EN (a): $g\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

\therefore UN EXTREMO RELATIVO

Es: $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{9}{4}\right)$

39) RECUERDE

$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

DATO: $f(x) = g(x + g(x))$

HACEMOS: $x + g(x) = h(x)$

$\sim f(x) = g(h(x))$

DE AQUÍ: $f'(x) = [g(h(x))]'$

$\rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot (h(x))'$

REEMPLAZANDO $h(x)$:

$f'(x) = g'(x + g(x)) \cdot (1 + g'(x))$

40) DADO $y = x\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow y' = \frac{1-2x^2}{(1-x^2)^{3/2}}$ ∇ ÉSTA ES LA PEN-DIENTE EN CUALQUIER PUNTO.

PARA $x = 0$

$\nabla y'_0 = \frac{1}{1} = 1$

COMO LA PENDIENTE VALE 1, EN-TONCES EL ÁNGULO MIDE 45°

BINOMIO DE NEWTON

Algebra

XX

CAPÍTULO

$$\textcircled{01} \text{ Sea } f = \frac{[C_{r+1}^{n+1} - C_r^n] C_{r-1}^{n-1}}{(C_r^n)^2 - C_{r+1}^{n+1} C_{r-1}^{n-1}}$$

$$\text{Obs: } C_{r-1}^{n-1} = \frac{r}{n} C_r^n$$

$$\text{Sea } f = \frac{[\frac{n+1}{r+1} C_r^n - C_r^n] \frac{r}{n} C_r^n}{(C_r^n)^2 - \frac{n+1}{r+1} C_r^n \cdot \frac{r}{n} C_r^n}$$

$$= \frac{\cancel{C_r^n} [\frac{n+1}{r+1} - 1] \frac{r}{n} \cancel{C_r^n}}{(\cancel{C_r^n})^2 [1 - \frac{n+1}{r+1} \cdot \frac{r}{n}]}$$

$$= \frac{[\frac{n-r}{r+1}] \frac{r}{n}}{\frac{n-r}{(r+1)n}} \therefore f = r$$

02 DESARROLLAMOS LOS NÚMEROS COMBINATORIOS:

$$1 + 7 \cdot \frac{n}{1} + 12 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\frac{n}{1} + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \left(\frac{2002}{2001} \right)^3$$

$$\frac{1 + 7n + 6n^2 - 6n + n^3 - 3n^2 + 2n}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = \left(\frac{2002}{2001} \right)^3$$

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} = \left(\frac{2002}{2001} \right)^3 \rightarrow \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \left(\frac{2002}{2001} \right)^3$$

$$\rightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{2002}{2001} \rightarrow n = 2001$$

$$\therefore \Sigma \text{ DECIFRAS DE } n: 3$$

$$\textcircled{03} 700 = a_1 + a_2(2!) + a_3(3!) + \dots + a_n(n!)$$

$$0 \leq a_k \leq k; a_4 = ?$$

Obs: A PARTIR DEL 2º SUMANDO, TODOS SON MÚLTIPLOS DE 2; OBSERVA QUE a_1 DEBE SER 2 PARA QUE DÉ 700.

$$\text{Obs: } 0 \leq a_1 \leq 1 \rightarrow a_1 = 0$$

ADEMÁS, $n \leq 6$, DADO QUE $6!$ EXCEDE A 700, ENTONCES: $n \leq 5$, DONDE PARA LLEGAR A 700, NECESARIAMENTE $n = 5$

LUEGO:

$$700 = 0 + 2(2!) + 0(3!) + 4(4!) + 5(5!)$$

$$\text{DE AQUÍ: } a_4 = 4$$

04 SEGÚN CONDICIÓN:

$$\frac{C_{r-1}^n}{3} = \frac{C_r^n}{4} = \frac{C_{r+1}^n}{5}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3)$$

DE (1) y (2), POR DEGRADACIÓN DE UN ÍNDICE:

$$\frac{\cancel{C_{r-1}^n}}{3} = \frac{n-r+1}{r} \frac{\cancel{C_{r-1}^n}}{4} \rightarrow 4r = 3n - 3r + 3$$

$$\rightarrow 7r - 3n = 3 \dots (\alpha)$$

DE (2) y (3), POR DEGRADACIÓN DE

UN ÍNDICE:

$$\frac{\cancel{C_n}}{4} = \frac{n-r}{r+1} \frac{\cancel{C_n}}{5} \rightarrow 5r+5 = 4n-4r$$

$$\rightarrow 9r - 4n = -5 \dots (\beta)$$

RESOLVIENDO (α) y (β) :

$$n = 62 \text{ y } r = 2\pi$$

② $C_{x-1}^x + C_{y-1}^y + C_{z-1}^z = C_9^{10}$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x + y + z = 10$

FORMANDO EL NÚMERO DE TERNAS
 TAL QUE LA SUMA DE SUS ELEMENTOS
 ENTEROS Y POSITIVOS (DATO)

SEA 10; SE TIENE:

• $\sum_{i=1}^n x_i = 1 \rightarrow \begin{matrix} 4 & + & 5 & = & 9 \\ 1 & & 8 & & \\ 2 & & 7 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 8 & & 1 & & \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{matrix}} \right\} 8 \text{ PAIR}$

⇒ #DETERRAS: 8


ANALIZANDO EN FORMAS SIMILAR,
SE TIENE:

- SI $x=2 \Rightarrow \# \text{ DE TERNAS: } 7$

• Si $x=3 \Rightarrow$ $11 : 6$

[illegible]

• Si $X=8 \Rightarrow \# \text{ DETERMINAS: } 1$

 # TOTAL
 DE TERNAS = $1 + 2 + 3 + \dots + 8$
 $= \frac{8 \times 9}{2} = \underline{36}$

06 RECHERCHÉ

DEJAROLLA DO

$$\underbrace{(a+b+c+\dots+p)}_{K \text{ TÉRMINOS}}^n; n \in \mathbb{Z}^+$$

SE TIENE:

$$\frac{\text{\# DE TÉRMINOS DEL DESARROLLO}}{=} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

APLICANDO EN $P(x,y,z) = (x+y+z)^6$

VEMOS QUE $n=6 \wedge k=3$

$$\Rightarrow \frac{\# \text{ DE TÉRMINOS DEL DESARROLLO}}{=} = \frac{(6+3-1)!}{6!(3-1)!}$$

$$= \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times 2}$$
$$= \underline{\underline{28}}$$

OT OBSERVESE:

$$\sum_{k=2}^n C_2^k = C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + C_2^5 + \dots + C_2^n$$
$$\Downarrow$$
$$= \underbrace{C_3^3 + C_2^3}_{C_3^4} + C_2^4 + C_2^5 + \dots + C_2^n$$
$$\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{C_3^5}$$
$$\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{C_3^6}$$
$$\qquad\qquad \dots \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{C_3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n C_2^k = C_3^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

LUEGO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^n C_k^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)n(n-1)}{6n^3} \right] = \frac{\infty}{\infty}$$

OBSÉRVESE, COMO EL GRADO DEL NUMERADOR (N) ES IGUAL AL GRADO DEL DENOMINADOR (D), EL LÍMITE VIENE DADO POR EL COCIENTE ENTRE LOS COEFICIENTES PRINCIPALES DEL N Y D.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^n C_2^k = \frac{1}{6}$$

08) DE $x^3 - C_1^n x^2 + C_2^n x - C_3^n = 0$

Si a, b, c son sus raíces, entonces por CARDANO-VIETE:

$$abc = C_3^n \Rightarrow C_3^n = 20 \text{ (dato)}$$

$$\rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 20$$

$$\rightarrow n(n-1)(n-2) = 6 \times 5 \times 4$$

Obs.: $n = 6$

La ec. es: $x^3 - 6x^2 + 15x - 20 = 0$

$$\begin{cases} \text{DE AQUÍ: } a+b+c=6 \\ a^2+b^2+c^2=15 \\ abc=20 \end{cases}$$

Por productos notables, se sabe que:

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ac) + 3abc$$

REEMPLAZANDO VALORES:

$$a^3+b^3+c^3 = 6^3 - 3(6)(15) + 3(20)$$

DE AQUÍ: $a^3+b^3+c^3 = 6$

El t_{k+1} sea $24x^n y^n$

Obs: $t_{k+1} = C_k^4 (2x^3)^{4-k} (2yx^{-2})^k$

$$= C_k^4 2^{4-k} \cdot 2^k x^{12-5k} y^k$$

Por dato: $\text{Exp.}(x) = \text{Exp.}(y)$

$$12-5k = k \rightarrow k=2$$

Además:

$$\text{COEF.} = C_2^4 2^2 \cdot 2^2 = 24 \text{ (dato)}$$

$$6 \cdot 2^2 \cdot 4 = 24 \rightarrow 2^2 = 1$$

DE AQUÍ: $2 = 1 \vee -1$

10) $(x+1)(x^2-2y)^{10}$

PARA OBTENER EL TÉRMINO CUYA PARTE LITERAL SEA $x^{15}y^3$

DE AQUÍ, HALLAMOS EL TÉRMINO CUYA PARTE LITERAL SEA $x^{14}y^3$

SUPONGAMOS QUE DICHO TÉRMINO OCUPA LUGAR $k+1$.

$$t_{k+1} = C_k^{10} (x^2)^{10-k} (-2y)^k$$

$$= \underbrace{C_k^{10} (-2)^k}_{\text{COEFICIENTE}} x^{20-2k} y^k$$

DE AQUÍ: $k=3$

Obs: $\text{COEF.} = C_3^{10} (-2)^3$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} (-8) = -960$$

11) Obs: $(x^2+2x+1)(x+2)^5 \equiv ?$

$$(x^2+2x+1)(C_0^5 x^5 + C_1^5 x^4 \cdot 2 + \dots + C_4^5 x \cdot 2^4 + C_5^5 2^5)$$

09) DE $(2x^3 + \frac{2y}{x^2})^4$ SUPONGAMOS q'

LA ADICIÓN DE LAS MULTIPLICACIONES INDICADAS NOS REPRODUCE EL TÉRMINO EN x ; ESTO ES:

$$2x \cdot C_5^5 \cdot 2^5 + 1 \cdot C_4^5 x \cdot 2^4$$

$$= (2 \cdot 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 5 \cdot 2^4)x = 144x$$

$$\therefore \text{COEF. DEL TÉRM. EN } x: \underline{144}$$

⑫ SE SABE QUE:

$$C_0^{99} + C_1^{99} + \dots + C_{98}^{99} + C_{99}^{99} = 2^{99}$$

POR COMPLEMENTARIAS, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$C_0^{99} + C_1^{99} + \dots + C_1^{99} + C_0^{99} = 2^{99}$$

SUMANDO LOS EQUIDISTANTES:

$$2(C_0^{99} + C_1^{99} + C_2^{99} + \dots + C_{49}^{99}) = 2^{99}$$

$$\rightarrow C_0^{99} + C_1^{99} + \dots + C_{49}^{99} = 2^{98}$$

SI TOMAMOS \lg EN BASE 2:

$$\lg_2(C_0^{99} + C_1^{99} + \dots + C_{49}^{99}) = \lg_2 2^{98}$$

$$\therefore \lg_2(C_0^{99} + C_1^{99} + \dots + C_{49}^{99}) = 98$$

$$\textcircled{13} \sum_{r=0}^n (m+r)C_r^n = \sum_{r=0}^n mC_r^n + \sum_{r=0}^n rC_r^n$$

$$= m \underbrace{\sum_{r=0}^n C_r^n}_A + \underbrace{\sum_{r=0}^n rC_r^n}_B$$

CALCULEMOS POR PARTES:

$$A = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n$$

CONOCIDO

$$\rightarrow A = 2^n$$

$$B = 1C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \dots + nC_n^n$$

POR DEGRADACIÓN DE LOS DOS INDICES EN CADA SUMANDO; SE TIENE:

$$B = nC_0^{n-1} + nC_1^{n-1} + nC_2^{n-1} + \dots + nC_{n-1}^{n-1}$$

$$= n(C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1})$$

CONOCIDO

$$\rightarrow B = n \cdot 2^{n-1}$$

LUEGO, LO PEDIDO ES:

$$\sum_{r=0}^n (m+r)C_r^n = m \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1} = (2m+n)2^{n-1}$$

⑭ DE $(x^2 + x^{-1} + 1)^6$, EL TÉRMINO GENERAL DEL DESARROLLO ES:

$$T.G. = \frac{6!}{\alpha! \beta! \gamma!} (x^2)^\alpha (x^{-1})^\beta (1)^\gamma$$

$$\rightarrow T.G. = \frac{6!}{\alpha! \beta! \gamma!} x^{2\alpha - \beta}$$

$$\text{DONDE: } \alpha + \beta + \gamma = 6 \dots (1)$$

ADemás, SI SU PARTE LITERAL ES

$$x^3 \rightarrow 2\alpha - \beta = 3 \dots (2)$$

NO OLVIDE QUE: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_0^+$ (3)

RESOLVIENDO (1), (2) y (3); SE TIENE 2 SOLUCIONES:

$$(1^\circ) \alpha = 2; \beta = 1; \gamma = 3$$

$$(2^\circ) \alpha = 3; \beta = 3; \gamma = 0$$

DONDE, EL COEFICIENTE DE x^3 SE OBTIENE SUMANDO LOS VALORES DE $\left(\frac{6!}{\alpha! \beta! \gamma!}\right)$ PARA LOS DOS TRÍOS DE VALORES HALLADOS PARA α, β, γ .

OSEA:

$$\begin{aligned} \text{COEF.}(x^3) &= \frac{6!}{2!1!3!} + \frac{6!}{3!3!0!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 1} \\ \therefore \text{COEF.}(x^3) &= 60 + 20 = 80 \end{aligned}$$

(15) DE $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^5 = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6}$

OBJ: α ES LA PARTE RACIONAL DE LA POTENCIACIÓN EN EL PRIMER MIEMBRO (NOTA: $\alpha \in \mathbb{Q}$)

▶ CALCULEMOS EL TÉRMINO RACIONAL DE $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$.

TÉRMINO RACIONAL = $\frac{5!}{m!n!p!} \cdot 1^m \cdot \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{3}^p$

DONDE, PARA QUE ÉSTE REPRESENTE UN TÉRMINO RACIONAL, ENTONCES:

CEJ: $n=2 \wedge p=2$

NO OLVIDAR Q: $m; n; p \in \mathbb{Z}_0^+$

ADemás QUE: $m+n+p=5$

POSIBILIDADES

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 0 |
| 1 | 4 | 0 |
| 3 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 4 |

DE AQUÍ, EL TÉRMINO RACIONAL SE OBTIENE SUMANDO LOS VALORES DE

$\frac{5!}{m!n!p!} \cdot 1^m \cdot \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{3}^p$ PARA LOS CINCO TRÍOS DE VALO-

RES HALLADOS PARA $m; n; p$.

CALCULANDO:

TÉRMINO RACIONAL $(\alpha) = 1 + 20 + 20 + 30 + 180 + 45 = 296$

(16) LA SUMA PEDIDA SE PUEDE ESCRIBIR:

$$S = \sum_{n=3}^n (n-2)(n-1)n$$

$$= \sum_{n=3}^n (n^3 - 3n^2 + 2n)$$

$$= \sum_{n=3}^n n^3 - 3 \sum_{n=3}^n n^2 + 2 \sum_{n=3}^n n$$

DONDE:

$$\sum_{n=3}^n n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - (2^3 + 1^3)$$

$$\sum_{n=3}^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (2^2 + 1^2)$$

$$\sum_{n=3}^n n = \frac{n(n+1)}{2} - (2+1)$$

JUEGO:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 9 \right) - 3 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 3 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} \cdot [n(n+1) - 2(2n+1) + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2 - 3n + 2)}{4}$$

$$n \rightarrow S = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \times \frac{6}{6}$$

$$= 6 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\therefore S = 3! \binom{n+1}{4}$$

$$(17) (1-x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$$

EXTENDIENDO:

$$(1-x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}$$

NOS PIDEN:

$$\sum_{k=0}^n a_{2k} = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}$$

• EN (α) , PARA $x=1$:

$$(1-1+1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}$$

$$\rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n} = 1 \dots (\beta)$$

• EN (α) , PARA $x=-1$:

$$(1+1+1)^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n}$$

$$\rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n} = 3^n \dots (\theta)$$

• $(\beta) + (\theta)$:

$$2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) = 3^n + 1$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \frac{3^n + 1}{2}$$

$$(18) \text{ DATO: } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

PERO, SABEMOS QUE:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k$$

$$\Rightarrow \text{CONCLUYO: } a_k = C_k^n \dots (\alpha)$$

OJEO QUE:

$$a_4 = C_4^n \wedge a_{n-6} = C_{n-6}^n = C_6^n$$

EN LA CONDICIÓN:

$$2C_4^n = 3C_6^n$$

$$2C_4^n = 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\text{DE AQUÍ: } 20 = n^2 - 9n + 20 \rightarrow n^2 = 9n$$

$$n = 9$$

$$\text{LUEGO, SEA } S = \sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$$

$$\rightarrow S = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$$

CON (α) :

$$S = C_1^9 + C_3^9 + C_5^9 + C_7^9 + C_9^9$$

CONOCIDO

$$\therefore S = 2^9 - 1 = 255$$

$$(19) \sum_{j=1}^i C_j^i = C_1^i + C_2^i + C_3^i + \dots + C_i^i$$

• SUMAMOS $C_0^i = 1$:

$$\sum_{j=1}^i C_j^i = C_0^i + C_1^i + C_2^i + \dots + C_i^i - C_0^i$$

CONOCIDO

$$n \rightarrow \sum_{j=1}^i C_j^i = 2^i - 1$$

LO PEDIDO SE REDUCE ASÍ:

$$\sum_{i=1}^{30} (2^i - 1) = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \dots + (2^{30} - 1)$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}) - 30$$

SUMA DE 30 TÉRMS. DE
UNA P.G. DE RAZÓN 2

$$= 2 \left(\frac{2^{30} - 1}{2 - 1} \right) - 30 = 2^{31} - 32$$

20. DE LA EXPANSIÓN DE $(2x+b)^{2n}$,
EL TÉRMINO DE PARTE LITERAL
 x^n OCUPA LUGAR $(n+1)$.

$$\rightarrow t_{n+1} = C_n^{2n} (2x)^n b^n$$

$$t_{n+1} = C_n^{2n} 2^n b^n x^n$$

Y DE LA EXPANSIÓN DE $(bx+2)^{2n-1}$,
EL TÉRMINO DE PARTE LITERAL
 x^n OCUPA LUGAR n

$$\rightarrow t_n = C_{n-1}^{2n-1} (bx)^n 2^{n-1}$$

$$t_n = C_{n-1}^{2n-1} b^n 2^{n-1} x^n$$

Por condición:

$$C_n^{2n} 2^n b^n = C_{n-1}^{2n-1} b^n 2^{n-1}$$

$$\frac{2n}{n} C_{n-1}^{2n-1} b^n = C_{n-1}^{2n-1} b^n$$

$$\text{DE DONDE: } 2 = \frac{1}{2} \therefore 2 = \frac{1}{2}$$

21. SUPONGAMOS QUE $A_n x^{n+3}$
OCUPA LUGAR $(k+1)$ EN LA EX

EXPANSIÓN DE $(x + \frac{1}{x})^{n+1}$

$$\rightarrow t_{k+1} = C_k^{n+1} x^{n+1-k} (x^{-1})^k$$

$$\rightarrow t_{k+1} = C_k^{n+1} x^{n+1-2k}$$

JUEGO:

$$n+1-2k = -n+3 \rightarrow k = n-1$$

$$C_k^{n+1} = A_n \rightarrow A_n = C_{n-1}^{n+1} = C_2^{n+1}$$

$$\rightarrow A_n = \frac{(n+1)n}{2}$$

¿NOS PIDEN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right]$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} = 2$$

$$22. 1C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \dots + nC_n^n < 1000$$

DEGRADANDO LOS ÍNDICES DE LOS
#S COMBINATORIOS, NOS QUEDA:

$$nC_0^{n-1} + nC_1^{n-1} + nC_2^{n-1} + \dots + nC_{n-1}^{n-1} < 999$$

$$\rightarrow n(C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}) < 999$$

CONOCIDO

$$\rightarrow n \cdot 2^{n-1} < 999; \text{ ojo: } n \in \mathbb{Z}^+$$

VEAMOS QUE LOS VALORES DE n QUE
LO VERIFICAN SON:

$$n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\therefore \# \text{ DE SOLUCIONES: } 7$$

23) P_n LO ESCRIBIMOS ASÍ:

$$P_n = C_0^n - C_1^n \left(\frac{1}{2}\right) + C_2^n \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \dots + (-1)^n C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

DESARROLLO CONOCIDO

$$\Rightarrow P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

NOS PIDEN:

$$\sum_{n=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

SUMA DE 9 TÉRMINOS DE UNA P.G. DE RAZÓN $1/2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^8 P_n = 1 \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} \right] = \frac{-\frac{511}{512}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{511}{256}$$

24) Si $P(x) = (1+ax+bx^2)^{10}$; $a \neq 0$

$$\Rightarrow T.I.(P) = P(0) = (1+0+0)^{10}$$

$$\therefore T.I.(P) = 1$$

25) DE $(a+b)^{19}$

$$\frac{tr}{tr-1} = \frac{C_{r-1}^{19} a^{20-r} b^{r-1}}{C_{r-2}^{19} a^{21-r} b^{r-2}} = \frac{2}{3} \text{ (DATO)}$$

DEGRADANDO UN ÍNDICE EN EL #COMBINATORIO DEL NUMERADOR.

$$\frac{2(1-r)}{r-1} \times \frac{b}{a} = \frac{2}{3}; \quad \frac{b}{a} = \frac{2}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{2(1-r)}{r-1} \times \frac{2}{27} = \frac{2}{3} \rightarrow 2(1-r) = 9(r-1) \therefore r = 3$$

26) UNA FORMA SENCILLA DE RESOLVER EJ:

$$(1+x)^5 (1+x^2)^4 \equiv ?$$

$$(1+5x+10x^2+\dots)(1+4x^2+6x^4+\dots)$$

OBJ: EL TÉRMINO EN x^2 , SE OBTIENE AL SUMAR LOS PRODUCTOS DE LOS TÉRMINOS SEÑALADOS.

$$\Rightarrow \text{TÉRMINO EN } x^2 = 4x^2 + 10x^2 = 14x^2$$

$$\therefore \text{COEFICIENTE} = 14$$

27) USEMOS EL TRIÁNGULO DE PASCAL

$$(1+x)^0 \rightarrow 1$$

$$(1+x)^1 \rightarrow 1 \quad 1$$

$$(1+x)^2 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(1+x)^3 \rightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$(1+x)^4 \rightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(1+x)^5 \rightarrow 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$(1+x)^6 \rightarrow 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

$$(1+x)^7 \rightarrow 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

$$\vdots$$

OBJ: LOS COEFICIENTES DE x^2 EN LAS EXPANSIONES DE LOS BINOMIOS INDICADOS, ESTÁN SEÑALADOS EN EL CÍRCULO MOSTRADO.

\Rightarrow LO PEDIDO ES LA SUMA DE

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots & (n-1) \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \text{TÉRMINO} \\ & & 1 & 1 & 1 & \dots & \end{matrix}$$

LUEGO, LA SUMA VIENE DADO POR:

$$\begin{aligned} \text{SUMA} &= 1C_1^{n-1} + \underbrace{2C_2^{n-1}}_{\text{DESDOBLA}} + 1C_3^{n-1} \\ &= \underbrace{C_1^{n-1} + C_2^{n-1}}_{C_2^n} + \underbrace{C_2^{n-1} + C_3^{n-1}}_{C_3^n} \\ \therefore \text{SUMA} &= C_3^{n+1} \end{aligned}$$

28) $P(x) = (1+x)(1+3x)(1+5x) \dots (1+(2n-1)x)$

EFFECTUANDO TODOS LOS PRODUCTOS
POSIBLES PARA OBTENER EL TÉRMI-
NO EN x^2 (COMO INDICA LAS FLECHAS)
LUEGO, EL COEF. DE x^2 SE OBTIE-
NE CALCULANDO LAS SUMAS:

$$S_1 = 1(3+5+7+\dots+(2n-1)) = 1(n^2-1^2)$$

$$S_2 = 3(5+7+9+\dots+(2n-1)) = 3(n^2-2^2)$$

$$S_3 = 5(7+9+11+\dots+(2n-1)) = 5(n^2-3^2)$$

$$\vdots$$

$$S_{n-1} = (2n-3)(2n-1) = (2n-3)[n^2-(n-1)^2]$$

LUEGO:

$$\text{COEF.}(x^2) = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1}$$

ESTO SE PUEDE ESCRIBIR
ASÍ:

$$= \sum_{k=2}^n (2k-3)[n^2-(k-1)^2]$$

$$= n^2 \sum_{k=2}^n (2k-3) - \sum_{k=2}^n (2k^3 - 7k^2 + 8k - 3)$$

$$= n^2(n-1)^2 - 2 \sum_{k=2}^n k^3 + 7 \sum_{k=2}^n k^2 - 8 \sum_{k=2}^n k + 3(n-1)$$

$$= n^2(n-1)^2 - 2 \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1 \right] + 7 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right] - 8 \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] + 3(n-1)$$

EFFECTUANDO ADECUADAMENTE SE OBTIENE:

$$\text{COEF.}(x^2) = \frac{(n-1)n(3n^2-n-1)}{6}$$

29) SIMILAR A LA RESOL. (14) (REVISE)

$$\text{DE } (x+2y-z)^8 \rightarrow \text{T.G.} = \frac{8!}{\alpha! \beta! \gamma!} x^\alpha (2y)^\beta (-z)^\gamma$$

$$\text{COEF.} = \frac{8!}{\alpha! \beta! \gamma!} \cdot 2^\beta (-1)^\gamma x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

ESTE TIENE PARTE LITERAL $x^2 y^3 z^3$

$$\Rightarrow \alpha=2; \beta=3; \gamma=3$$

LUEGO:

$$\text{COEF.}(x^2 y^3 z^3) = \frac{8!}{2! 3! 3!} \cdot 2^3 (-1)^3$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3 \times 3} \times (-8)$$

$$\text{EFFECTUANDO: COEF.}(x^2 y^3 z^3) = -4480$$

30) RECUERDE

$$(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + (C_2^n)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_n^{2n}$$

NOJ PUEEN:

$$P = (C_1^n)^2 + 2(C_2^n)^2 + 3(C_3^n)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$$P = 0(C_0^n)^2 + 1(C_1^n)^2 + \dots + (n-1)(C_{n-1}^n)^2 + n(C_n^n)^2 \dots (\alpha)$$

APLICANDO COMPLEMENTARIOS E IN-
VIRTIENDO EL ORDEN DE LOS SUMAN-
DOS:

$$P = n(C_0^n)^2 + (n-1)(C_1^n)^2 + \dots + 1(C_{n-1}^n)^2 + 0(C_n^n)^2 \dots (\beta)$$

$$\begin{aligned} \bullet (a) + (b): 2S &= n(c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2) \\ \Rightarrow 2S &= n[(c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 &= n c_n^{2n} \rightarrow S = \frac{25n}{2} c_n^{2n-1} \\ \therefore S &= n c_n^{2n-1} \end{aligned}$$

(31) $x + y + z < 10; x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

| | | | | |
|---|---|---|----------|----------|
| P | 1 | 1 | 1; ... 7 | → 7 SOL. |
| O | 1 | 2 | 1; ... 6 | → 6 SOL. |
| S | 1 | 7 | 1 | → 1 SOL. |
| B | 2 | 1 | 1; ... 6 | → 6 SOL. |
| I | 2 | 2 | 1; ... 5 | → 5 SOL. |
| L | 2 | 6 | 1 | → 1 SOL. |
| D | 7 | 1 | 1 | → 1 SOL. |

LUEGO:

$$\begin{aligned} \# \text{ TOTAL DE SOLUC.} &= \frac{1}{2} [1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 7 \times 8] \\ &= \frac{7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3} = \frac{09}{3} \end{aligned}$$

(32) $\begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 16 & \dots & n \text{ TÉRM.} \\ 1^{\text{a}} \text{ DIF.} & 2 & 5 & 8 & \dots & \\ 2^{\text{a}} \text{ DIF.} & 3 & 3 & \dots & \end{matrix}$

LOS SUMANDOS DADOS, SON TÉRMINOS DE UNA P.A. DE SE-
GUINDO ORDEN CUYA SUMA DE
ELEMENTOS VIEJE DADO POR

$$1 + 3 + 8 + 16 + \dots = 1c_1^n + 2c_2^n + 3c_3^n$$

n TÉRMINOS

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = 1; b = 2; c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 6$$

(33) SI LA P.A. INDICADA TIENE A
 a_1 Y r COMO PRIMER TÉRMINO
Y RAZÓN RESPECTIVAMENTE, EN-
TONCES:

$$S_1 = [2a_1 + (n-1)r] \frac{n}{2}$$

$$S_2 = [2a_1 + (2n-1)r] \frac{2n}{2}$$

$$S_2 = [4a_1 + (4n-2)r] \frac{n}{2}$$

$$S_3 = [2a_1 + (3n-1)r] \frac{3n}{2}$$

$$\text{OBS: } S_2 - S_1 = [2a_1 + (3n-1)r] \frac{n}{2}$$

LUEGO:

$$\frac{S_3}{S_2 - S_1} = \frac{[2a_1 + (3n-1)r] \frac{3n}{2}}{[2a_1 + (3n-1)r] \frac{n}{2}} = 3$$

(34) DE $(1-3x)^{10/3}$

OBS: ES FÁCIL NOTAR QUE EL TÉR-
MINO EN x^3 OCUPA LUGAR 4.

$$t_4 = \binom{10/3}{3} (-3x)^3 = -27 \binom{10/3}{3} x^3$$

COEFICIENTE

OBSERVO:

$$\text{COEF. DE } x^3 = -27 \times \frac{10}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{4}{2}$$

$$\text{DE AQUÍ: COEF. DE } x^3 = -\frac{140}{3}$$

(35) Sea $S = \frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \frac{4}{9!} + \dots$

• MULTIPLICO POR 2:

$$2S = \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + \dots$$

$$2S = \frac{3-1}{3!} + \frac{5-1}{5!} + \frac{7-1}{7!} + \frac{9-1}{9!} + \dots$$

DESDOBLAMOS EN LAS FRACCIONES

$$2S = \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{5}{5!} - \frac{1}{5!} + \frac{7}{7!} - \frac{1}{7!} + \frac{9}{9!} - \frac{1}{9!} + \dots$$

DE AQUÍ, DESCOMPONIAMOS LOS FACTORIALES Y CAUCELANDO:

$$2S = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \dots \quad \dots (\alpha)$$

RECUERDE QUE:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

PARA $x = -1$

$$\Rightarrow e^{-1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots$$

$$\text{En } (\alpha): 2S = \frac{1}{e} \quad \therefore S = \frac{1}{2e}$$

(36) Sea $M(x) = \left(x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right)^{10}$

¡OJO!, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$= \left[\left(\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right)^2 \right]^{10}$$

$$= (\sqrt{x} + 3\sqrt{x}^{-1})^{20}$$

• OBS: $M(x)$ TIENE 21 TÉRMINOS (ENTRE RACIONALES E IRRACIONALES)

• CALCULEMOS EL TÉRMINO GENERAL DEL DESARROLLO.

$$t_{k+1} = C_k^{20} (x^{1/2})^{20-k} (x^{-1/3})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{20} x^{10 - \frac{5}{6}k}$$

• DONDE: $k = 0; 1; 2; \dots; 20$

• OBS: PARA QUE ÉSTE REPRESENTA UN TÉRMINO RACIONAL DEBE DEBER DEL EXPONENTE DE x , DEBE SER UN NÚMERO ENTERO.

$$\text{OSEA: } 10 - \frac{5}{6}k = \# \text{ ENTERO}$$

$$\text{PARA ESTO: } k = 6 \rightarrow k = 0; 6; 12; 18$$

4 VALORES

• OBS: POR CADA VALOR DE k EXISTE UN TÉRMINO RACIONAL,

• EXISTEN 4 TÉRMIN. RACIONALES

$$\therefore \# \text{ DE TÉRMIN. IRRACIONALES} = 21 - 4 = 17$$

(37) $\binom{n}{2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$

$$= \frac{n(n-1)[n(n-1)-1]}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{8}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{8}$$

JUEGO:

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{4}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{8}}{\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{8} = 3$$

38) Si $C_{4y+3}^{2x} = C_{y+3}^{x^2-12x+13}$; $y \neq 0$

Obs: $x, y \in \mathbb{Z}^+$

LA ÚNICA POSIBILIDAD ES:

$$\begin{matrix} (4y+3) & (y+3) & = & 2x & = & x^2-12x+13 \\ (1) & (2) & & (3) \end{matrix}$$

• DE (2) y (3): $x^2-14x+13=0$
 $(x-13)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=13 \vee x=1$

• DE (1) y (2): CUANDO $x=13$
 $5y+6=26 \rightarrow y=4$

$\therefore x+y=17$

NOTA: PARA $x=1 \rightarrow y \notin \mathbb{Z}^+$

39) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$S = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots$$

$$S = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Obs: Los sumandos son de la

FORMA: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

• $n=2; 3; 4; \dots$

ADemás, DICHO FRACCIÓN DESCOM-
 PUESTA EN FRACCIONES PARCIALES
 (REVISE SU TEORÍA DE FRACCIONES)
 ES EQUIVALENTE A:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

OJEA QUE:

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

EXTENDIENDO:

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8} + \dots \right]$$

OBSÉRVESE, LA SUMA DE LOS ELE-
 MENTOS CONTENIDOS EN CADA DIA-
 GONAL, VALE 0.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \right] \therefore 12S = 1$$

40) Obs: $2 \log x \sqrt{x} = \sqrt{x^{6 \log 10}} = \sqrt{10}$

\Rightarrow NOS PUEDE EL 9º TÉRMINO DE

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}^{5 \log x}} + x \sqrt{10} \right)^{10}; x > 0$$

$$= 10^5 \left[\sqrt{x}^{-5 \log x} + x \right]^{10}$$

DE AQUÍ, SE TIENE:

$$t_9 = 10^5 C_8^{10} (\sqrt{x}^{-5 \log x})^2 (x)^8$$

por dato: $t_9 = 450$; oyo: $C_8^{10} = C_2^{10}$

$$\Rightarrow 10^5 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} x^{-5 \log x + 8} = 45 \times 10$$

$$\rightarrow 10^4 = x^{5 \log x - 8}$$

TOMANDO LOGARITMOS:

$$\log 10^4 = \log x^{5 \log x - 8}$$

$$\rightarrow 4 = (5 \log x - 8) \log x$$

$$5 \log^2 x - 8 \log x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 5 \log x & & 2 \\ & \nearrow & \searrow \\ \log x & & -2 \end{array}$$

$$(5 \log x + 2)(\log x - 2) = 0$$

DE AQUÍ: $\log x = -\frac{2}{5} \vee \log x = 2$

$$\Rightarrow x_1 = 10^{-2/5} \vee x_2 = 10^2$$

$$\therefore x_1 x_2 = 10^{8/5}$$

41) PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

$$* t_1 = \frac{1}{i} < > -i; * q = 1+i \text{ (razón)}$$

Luego: $t_6 = t_1 q^5$

$$\rightarrow t_6 = -i(1+i)^5$$

PERO $(1+i)^5 = [(1+i)^4] \times (1+i)$

$$\Rightarrow (1+i)^5 = -4(1+i)$$

OSEA QUE:

$$t_6 = -i[-4(1+i)] = 4i(1+i)$$

$$\therefore t_6 = 4(-1+i)$$

$$\text{————— } 0 \text{ —————}$$

Editorial

CUZCAN



Q1 OBSÉRVESE:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{n-1}}$$

$$\text{SEA } a_n = \frac{n}{(n+1)2^{n-1}} \rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)2^n}$$

LUEGO, POR CRITERIO DE LA RAZÓN:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(n+2)2^n}}{\frac{n}{(n+1)2^{n-1}}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n(n+2)2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 4n} \right|$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} < 1 \therefore \text{LA SERIE CONVERGE}$$

Q3 OBS: $x - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} - \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\sqrt{n}}$

$$\text{SEA } a_n = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\sqrt{n}} \rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

POR CRITERIO DE LA RAZÓN:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1} x^n}{\sqrt{n}}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n}(-1)x}{\sqrt{n+1}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad \text{ESTO VALE 1}$$

$$\Rightarrow L = |x|$$

AHORA, SI $L > 1 \rightarrow$ LA SERIE ES DIVERGENTE.

$$\Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

Q2 OBS: $\frac{1!}{5} + \frac{3!}{5^3} + \frac{5!}{5^5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{5^{2n-1}}$

$$\text{SEA } a_n = \frac{(2n-1)!}{5^{2n-1}} \rightarrow a_{n+1} = \frac{(2n+1)!}{5^{2n+1}}$$

LUEGO, POR CRITERIO DE LA RAZÓN:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2n+1)!}{5^{2n+1}}}{\frac{(2n-1)!}{5^{2n-1}}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)! 5^{2n-1}}{(2n-1)! 5^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)2n}{25} \right|$$

$$\text{DE AQUÍ: } L = \infty$$

\therefore LA SERIE DIVERGE

Q4 OBSÉRVESE:

$$\frac{x+1}{2} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$$

$$\text{SEA } a_n = \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$$

POR CRITERIO DE LA RAÍZ:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x+1}{2}\right|^n}$$

$$\text{DE AQUÍ: } L = \left|\frac{x+1}{2}\right|$$

LUEGO, LA SERIE ES DIVERGENTE

$$\text{SI } L > 1, \text{ ES DECIR: } \left|\frac{x+1}{2}\right| > 1$$

$$\rightarrow \frac{x+1}{2} < -1 \vee \frac{x+1}{2} > 1$$

$$x < -3 \vee x > 1$$

05 DE LA SUCECIÓN $\frac{1}{3}; \frac{3}{6}; \frac{5}{9}; \frac{7}{12}; \dots$

EL TÉRMINO ENÉSIMO
ES (TÉRMINO GENERAL): $a_n = \frac{2n-1}{3n}$

DE AQUÍ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$

SUPONIENDO QUE A PARTIR DE ES
TE TÉRMINO SE VERIFICA LA CON-
DICIÓN PROPUESTA, ENTONCES:

$$\left| \frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{10} < \frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} < \frac{1}{10}$$

$$-\frac{1}{10} < \frac{2}{3} - \frac{1}{3n} - \frac{2}{3} < \frac{1}{10}$$

POR (-1): $-\frac{1}{10} < \frac{1}{3n} < \frac{1}{10}$

COMO $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \frac{1}{3n} < \frac{1}{10}$

DE AQUÍ: $3n > 10 \rightarrow n > 3, \hat{3}$

OSEA QUE: $n = 4; 5; 6; \dots$

\therefore A PARTIR DEL CUARTO
SE VERIFICA LO PROPUESTO

06 (I) $a_n = 3n^2 - 5n^3 + 1000$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 + 1000$$

$$-\infty$$

$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ (I) ES V

(II) $b_n = n^5 - 100000n^4$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 - 100000 \lim_{n \rightarrow \infty} n^4$$

$$+\infty$$

$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \Rightarrow$ (II) ES V

(III) $c_n = 7n^3 - \sqrt[3]{5n^8}$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 7 \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - \sqrt[3]{5 \lim_{n \rightarrow \infty} n^8}$$

$$+\infty$$

$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty \Rightarrow$ (III) ES V

(IV) $d_n = 7n^3 - \sqrt[3]{5n^{10}}$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 7 \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - \sqrt[3]{5 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{10}}$$

$$-\infty$$

$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty \Rightarrow$ (IV) ES V

\therefore VVVV

07 LO PEDIDO ES EQUIVALENTE A:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2(k+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+4}{k^2(k+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)^2 - k^2}{k^2(k+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2} \right)$$

EXTENDIENDO:

$$\frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right) + \dots \right]$$

CANCELANDO NOS QUEDA:

$$\frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{5}{4} \right] = \frac{5}{16}$$

$$(08) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$$

OB: LA FRACCIÓN DADA, DESCOM-
PUESTA EN FRACCIONES PARCIA-
LES (REVISE TENDRÍA DE FRAC-
CIONES) ES EQUIVALENTE A:

$$\frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)} = \frac{5}{3(n-1)} - \frac{3}{2n} - \frac{1}{6(n+2)}$$

SEA QUE:

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{3(n-1)} - \frac{3}{2n} - \frac{1}{6(n+2)} \right)$$

EXTENDIENDO:

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{5}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{24} \right] \\ &+ \left[\frac{5}{6} - \frac{3}{6} - \frac{1}{30} \right] \\ &+ \left[\frac{5}{9} - \frac{3}{9} - \frac{1}{36} \right] \\ &+ \left[\frac{5}{12} - \frac{3}{12} - \frac{1}{42} \right] \\ &+ \left[\frac{5}{15} - \frac{3}{15} - \frac{1}{45} \right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

OB: LA SUMA DE CADA 3 TÉRMINOS
ADECUADOS VALE 0 (LO INDICA-
DO)

$$S = \frac{5}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{6} + \frac{5}{9}$$

$$\text{SUMANDO: } S = \frac{65}{36}$$

(09) SEA LO PEDIDO:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(4n+10)}$$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$\text{O TAMBIÉN: } S = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$$

DESDOBLANDO:

$$S = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right)$$

EXTENDIENDO:

$$S = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \dots \right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{20}$$

(10) (I) DE LA SUCESIÓN $1; \frac{4}{3}; \frac{9}{5}; \frac{16}{7}; \dots$

$$\text{SE TIENE: } a_n = \frac{n^2}{2n-1}$$

LUEGO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \text{LA SUCESIÓN DIVERGE}$$

(II) DE LA SUCESIÓN

$$\frac{1^2+1}{1}; \frac{2^2+1}{1+2}; \frac{3^2+1}{1+2+3}; \dots$$

SE TIENE:

$$a_n = \frac{n^2+1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{n^2+1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{2n^2+2}{n^2+n}$$

LUEGO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \Rightarrow \text{LA SUCESIÓN CONVERGE A 2}$$

(III) DE LA SUCESIÓN

$$(\log 1 - \log 2); (\log 2 - \log 3); (\log 3 - \log 4) \dots$$

SE TIENE: $a_n = \log n - \log(n+1)$

$$\rightarrow a_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

LUEGO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \log 1 = 0$$

LA SUCESIÓN
CONVERGE A 0

∴ DIVERGE; CONVERGE A 2;
CONVERGE A 0

(11) (*) $a_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)}{n(1+2+3+\dots+n)}$

SEA $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$

$$\rightarrow S = \sum_{n=1}^n n(n+1) = \sum_{n=1}^n (n^2 + n)$$

$$= \sum_{n=1}^n n^2 + \sum_{n=1}^n n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$\rightarrow S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

LUEGO:

$$a_n = \frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{n \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]} = \frac{2n+4}{3n}$$

LUEGO: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$ LA SUCESIÓN
CONVERGE A $\frac{2}{3}$

(**) $b_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n)^2}$

SEA $S_1 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n)^2$

HACIENDO QUITA Y PON:

$$S_1 = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 + \dots + (2n)^2}_{\text{CONOCIDO}} - \underbrace{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)}_{\text{CONOCIDO}}$$

$$S_1 = \frac{(2n)(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)(8n+2-n-1)}{6}$$

$$\rightarrow S_1 = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$$

LUEGO:

$$b_n = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}} = \frac{n+1}{7n+1}$$

∴ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{7}$ LA SUCESIÓN
CONVERGE A $\frac{1}{7}$

∴ LAS SUCESIONES CONVERGEN
A $\frac{2}{3}$ Y $\frac{1}{7}$ RESPECTIVAMENTE

(12) • $a_n = \left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right); n \in \mathbb{N}$

SABEMOS QUE: $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$

• MULTIPLICADO POR $\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)$

$$-\frac{2n+1}{n^2+n} \leq \underbrace{\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{a_n} \leq \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$(15) \text{ DE } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x_n + 2y_n)/5 \\ (2x_n + 3y_n)/5 \end{pmatrix} \dots (\alpha)$$

POR DADO: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge y_1 = 0$

EN (α) :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2(1)/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5^2 \\ 12/5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5^2 \\ 2(1+5)/5^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63/5^3 \\ 62/5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63/5^3 \\ 2(1+5+5^2)/5^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 313/5^4 \\ 312/5^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 313/5^4 \\ 2(1+5+5^2+5^3)/5^4 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+5+\dots+5^{n-2})+1/5^{n-1} \\ 2(1+5+5^2+\dots+5^{n-2})/5^{n-1} \end{pmatrix}$$

OBSERVESE:

$$* x_n = \frac{2\left(\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)+1}{5^{n-1}} = \frac{5^{n-1}+1}{2 \cdot 5^{n-1}}$$

OTAMBIÉN: $x_n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{5^{n-1}} \right]$

EN FORMA SIMILAR:

$$y_n = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right]$$

LLEVANDO AL LÍMITE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

\therefore EL PUNTO $P_n(x_n, y_n)$ CONVERGE A $(1/2; 1/2)$

(16) Si LA SUCECIÓN (ϑ_n) CONVERGE A L , PODEMOS DECIR:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = L = ?$$

DE LA IGUALDAD:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_{n+5}}{2\vartheta_{n+1}} = 3$$

$$\rightarrow \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_{n+5}}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_{n+1}} = 3$$

OSEA QUE: $\frac{L+5}{2L+1} = 3$

$$\rightarrow L+5 = 6L+3 \therefore L = 2/5$$

(17) (I) $\{(\vartheta^n + b^n)^{1/n}\}; 0 < \vartheta < b$

OB^j: $0 < \vartheta^n < b^n$

SUMO b^n : $b^n < \vartheta^n + b^n < 2b^n$

ELEVADO A LA $1/n$:

$$b < (\vartheta^n + b^n)^{1/n} < 2^{1/n} \cdot b$$

DE AQUÍ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b = b \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} \cdot b = b$$

POR CRITERIO DEL EMPAREJADO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\vartheta^n + b^n)^{1/n} = b \quad \left\{ (\vartheta^n + b^n)^{1/n} \right\} \text{ CONVERGE A } b$$

(II) SEA $\vartheta_n = \frac{(\operatorname{sen} \theta)^{n+1} + (\cos \theta)^{n+1}}{(\operatorname{sen} \theta)^n + (\cos \theta)^n}$

$$a_n = \frac{(\cos \theta)^{n+1} \left[\frac{(\sec \theta)^{n+1}}{\cos \theta} + 1 \right]}{(\cos \theta)^n \left[\frac{(\sec \theta)^n}{\cos \theta} + 1 \right]}$$

$$a_n = \cos \theta \left[\frac{(\sec \theta)^{n+1} + \cos \theta}{(\sec \theta)^n + \cos \theta} \right]$$

DATO: $0 < \theta < \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 < \sec \theta < 1$

OTRO: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sec \theta)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sec \theta)^{n+1} = 0$

TOMANDO LÍMITE EN a_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \cos \theta \left[\frac{0+1}{0+1} \right] = \cos \theta$$

$\therefore (a_n)$ CONVERGE A $\cos \theta$

(III) SEA $L = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}} > 0$

OBJ: $L^2 = 1 + L \rightarrow L^2 - L - 1 = 0$

DE AQUÍ: $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

CONVERGE A ESTE VALOR.

(18) $a_{n+1} = a_1 + a_n + a_1 \cdot a_n \dots (I)$

TOMANDO LÍMITE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + a_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

SI LA SUCECIÓN CONVERGE, ENTONCES:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L = ?$$

LUEGO: $L = a_1 + L + a_1 \cdot L$

$\rightarrow a_1 L = -a_1 \rightarrow L = -1$

\therefore LA SUCECIÓN CONVERGE A -1

(19) CORRECCIÓN: $\frac{a_{n+1}}{2002} < \frac{a_n}{2003}$

DEL DATO: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2002}{2003}$

LLEVANDO: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 0,9 < 1$

$\Rightarrow (a_n)$ CONVERGE A 0 (VER TEORÍA)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + n - 2}{4a_n + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 2}{3n + 1} = \frac{1}{3}$

(20) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

SEA $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = ?$

EN (α): $\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \end{cases}$

EN (β): $\begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1/3 \\ c-d=-1/3 \end{cases}$

RESOLVIENDO EL SISTEMA:

$a = 2/3$; $b = 1/3$; $c = 1/3$; $d = 2/3$

LUEGO: $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3+1 \end{pmatrix} / 2$

DADE: $A^2 = \frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3^2-1 \\ 3^2+1 \end{pmatrix} / 2$

$A^3 = \frac{1}{3^3} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3^3-1 \\ 3^3+1 \end{pmatrix} / 2$

$A^4 = \frac{1}{3^4} \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3^4-1 \\ 3^4+1 \end{pmatrix} / 2$

$A^n = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}$

Ó TAMBIÉN:

$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \end{pmatrix}$

TOMANDO LÍMITE: $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

21) Sea: $S = \sum_{n=0}^{\infty} (\sec x)^{2n}$

EXTENDIENDO:

$$S = 1 + (\sec x)^2 + (\sec x)^4 + (\sec x)^6 + \dots$$

SERIE GEOMÉTRICA
(RAZÓN = $\sec^2 x$)

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1 - \sec^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

USANDO EL DATO:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

DAUNDE: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $x = 45^\circ \vee x = 135^\circ$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{3}(x-2) \right| < 1$$

$$\text{DE AQUÍ: } -1 < \frac{x}{3}(x-2) < 1$$

$$\cdot \text{POR 3: } -3 < x^2 - 2x < 3$$

$$\cdot \text{SUMO 1: } -2 < \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{TCP}} < 4$$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$$0 \leq (x-1)^2 < 4$$

$$\text{DE AQUÍ: } -2 < x-1 < 2$$

$$\cdot \text{SUMO 1: } -1 < x < 3 \quad (\alpha)$$

$$\cdot \text{DE } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log_2 \frac{x}{2} \right)^n$$

$$\text{SEA } a_n = \left(\log_2 \frac{x}{2} \right)^n$$

LUEGO, POR CRITERIO DE LA RAÍZ:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \log_2 \frac{x}{2} \right|^n} = \left| \log_2 \frac{x}{2} \right|$$

OBJ: LA SERIE SERÁ CONVERGENTE
SI $L < 1$ (TEORÍA)

$$\Rightarrow \left| \log_2 \frac{x}{2} \right| < 1$$

$$\text{DE AQUÍ: } -1 < \log_2 \frac{x}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x}{2} < 2$$

$$\cdot \text{POR 2: } 1 < x < 4 \quad (\beta)$$

INTERSECTANDO (α) y (β) , SE TIENE:

$$1 < x < 3$$

AQUÍ LAS DOS SERIES
CONVERGEN.

22) DE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n (x-2)^{n-1}$

$$\text{SEA } a_n = \left(\frac{x}{3} \right)^n (x-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \left(\frac{x}{3} \right)^{n+1} (x-2)^n$$

LUEGO, POR CRITERIO DE LA RAZÓN:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{x}{3} \right)^{n+1} (x-2)^n}{\left(\frac{x}{3} \right)^n (x-2)^{n-1}} \right|$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{x}{3} \right) (x-2) \right|$$

$$\text{OBJ QUE: } L = \left| \frac{x}{3} (x-2) \right|$$

OBJ: LA SERIE SERÁ CONVERGENTE,
SI $L < 1$ (TEORÍA)

$$23) \text{ Sea } S = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right)^{m+2}$$

S_1

*HALLAMOS S_1 :

$$S_1 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right)^6 + \dots$$

SUMA LÍMITE (RAZÓN = $\frac{1}{4}$)

$$\hookrightarrow S_1 = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \rightarrow S_1 = \frac{1}{3}$$

LUEGO: $S = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{m+2}$

$$\rightarrow S = \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \left(\frac{1}{3} \right)^4 + \dots$$

SUMA LÍMITE (RAZÓN = $\frac{1}{3}$)

$$\hookrightarrow S = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} \therefore S = \frac{1}{6}$$

$$24) \text{ Sea } S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \operatorname{sen} \left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi$$

EXTENDIENDO:

$$S = \left(\frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \operatorname{sen} \frac{7\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^4 \operatorname{sen} \frac{9\pi}{2} + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)(-1) + \left(\frac{1}{4} \right)(1) + \left(\frac{1}{8} \right)(-1) + \left(\frac{1}{16} \right)(1) + \dots$$

$$\hookrightarrow S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

SUMA LÍMITE (RAZÓN = $-\frac{1}{2}$)

$$\rightarrow S = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} \therefore S = -\frac{1}{3}$$

$$25) \text{ Sea } S = \frac{2+3}{6} + \frac{2^2+3^2}{6^2} + \frac{2^3+3^3}{6^3} + \dots$$

DESDOBLANDO Y AGRUPANDO:

$$S = \left(\frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \dots \right) + \left(\frac{3}{6} + \frac{3^2}{6^2} + \frac{3^3}{6^3} + \dots \right)$$

$$S = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right)$$

SUMAS LÍMITES

$$\hookrightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1$$

$\therefore S = \frac{3}{2}$

$$26) \text{ Sea } S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{3^n}$$

DESDOBLANDO:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$\hookrightarrow S = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$S_1 \quad S_2$

CALCULEMOS POR PARTES:

$$* S_1 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \dots$$

SERIE GEOMÉTRICA ($r = \frac{2}{3}$)

$$\hookrightarrow S_1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \rightarrow S_1 = 3$$

$$* S_2 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

SERIE GEOMÉTRICA ($r = \frac{1}{3}$)

$$\hookrightarrow S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \rightarrow S_2 = \frac{3}{2}$$

LUEGO:

$$S = 2(3) - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

(27) SEA $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}$

DESDOBLANDO:

$$S = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{S_2}$$

PER PARTES:

$$* S_1 = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots$$

SUMA LÍMITE ($r = \frac{2}{3}$)

$$\hookrightarrow S_1 = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \rightarrow S_1 = 2$$

$$* S_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$$

SUMA LÍMITE ($r = -\frac{1}{3}$)

$$\hookrightarrow S_2 = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{1}{3})} \rightarrow S_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore S = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

(28) obs: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x=n}^{n+m} ar^x = \sum_{x=n}^{\infty} ar^x$

EXTENDIENDO:

$$\sum_{x=n}^{\infty} ar^x = ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} + \dots$$

SUMA LÍMITE ($r = r$)

DATO, DEBE DECIR: $0 < r < 1$

$$\sum_{x=n}^{\infty} ar^x = \frac{ar^n}{1-r}$$

(29) SEA LO PEDIDO, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{9}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\hookrightarrow S = -\frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \frac{81}{256} - \dots$$

SUMA LÍMITE ($r = -\frac{3}{4}$)

$$\rightarrow S = \frac{-\frac{3}{4}}{1 - (-\frac{3}{4})} \therefore S = -\frac{3}{7}$$

(30) SEA

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) (\cos \theta)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \theta)^n$$

EXTENDIENDO:

$$S = \frac{1}{2} (\cos \theta + \cos^2 \theta + \cos^3 \theta + \dots)$$

SUMA LÍMITE ($r = \cos \theta$)

$$\hookrightarrow S = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) = \frac{\cos \theta}{2 - 2 \cos \theta}$$

31) "FACTORIZAMOS" $\cos 30^\circ$:
 $S = \cos 30^\circ (1 + \cos^2 30^\circ + \cos^4 30^\circ + \dots)$

SERIE GEOMÉTRICA
 (Razón = $\cos^2 30^\circ$)

$$\Rightarrow S = \cos 30^\circ \left(\frac{1}{1 - \cos^2 30^\circ} \right)$$

$$= \cos 30^\circ \left(\frac{1}{\sin^2 30^\circ} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \quad \therefore S = 2\sqrt{3}$$

32) OBSÉRVESE LA EQUIVALENCIA:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (1 - \sqrt{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^k$$

EXTENDIENDO:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^k = 1 + (1 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})^2 + \dots$$

SERIE GEOMÉTRICA
 ($r = 1 - \sqrt{2}$)

$$= \frac{1}{1 - (1 - \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

33) TRANSFORMANDO A FRACCIÓN
 GENERATRIZ:

$$S = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^3} + \dots$$

SERIE GEOMÉTRICA ($r = -\frac{1}{10}$)

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{10})} \quad \therefore S = \frac{10}{11}$$

34) DE $\sum_{k=1}^n a_k = 3n^2$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 3n^2$$

$$\cdot \text{Si } n=1 \rightarrow a_1 = 3$$

$$\cdot \text{Si } n=2 \rightarrow a_1 + a_2 = 12 \rightarrow a_2 = 9$$

$$\cdot \text{Si } n=3 \rightarrow \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{12} = 27 \rightarrow a_3 = 15$$

$$\cdot \text{Si } n=4 \rightarrow \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{27} = 48 \rightarrow a_4 = 21$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

OBSÉRVESE, LOS TÉRMINOS CORRESPONDEN A UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA DE RAZÓN IGUAL A 6.

$$\rightarrow a_1; a_2; a_3; a_4; a_5 \dots; a_n$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad 9 \quad 15 \quad 21 \quad 27$$

LUEGO:

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}$$

ADICIÓN DE TÉRMINOS (n)
 DE UNA P.A. DE RAZÓN 12

$$= [2(9) + (n-1)12] \frac{n}{2}$$

DE AQUÍ: $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 6n^2 + 3n$

SIMILAR SE CALCULA LA OTRA SUMATORIA (¡HÁZGALO!); SE OBTIENE:

$$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 6n^2 - 3n$$

LO PEDIDO SE REDUCE A:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{6n^2+3n} - \sqrt{6n^2-3n}}{f(n)}$$

EVALUANDO: $L = \infty - \infty$

RACIONALIZANDO EN $f(n)$:

$$f(n) = \frac{(6n^2+3n) - (6n^2-3n)}{\sqrt{6n^2+3n} + \sqrt{6n^2-3n}}$$

$$f(n) = \frac{6n}{\sqrt{6n^2+3n} + \sqrt{6n^2-3n}}$$

DE AQUÍ:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{6}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} = \frac{6}{2\sqrt{6}}$$

RACIONALIZANDO: $L = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(35) NOTA: RESUÉLVASE EN FORMA SIMILAR A LA RESOLUCIÓN ANTERIOR (REVISE).

DE $\sum_{i=1}^n a_i = 5n^2 + 2n$; LOS TÉRMI-

LOS CORRESPONDEN A UNA SUCE-
SIÓN ARITMÉTICA DE RAZÓN 10

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & ; & a_2 & ; & a_3 & ; & a_4 & ; & \dots & ; & a_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 7 & & 17 & & 27 & & 37 & & & & \end{array}$$

DOQUE:

$$a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n+1} =$$

ADICIÓN DE $(n+1)$ TÉRMI-
LOS DE UNA P.A. DE RAZÓN 30

$$= \frac{[2(7) + (n+1-1)30](n+1)}{2}$$

$$a_1 + \dots + a_{3n+1} = (15n+7)(n+1)$$

EN FORMA SIMILAR PARA LA
OTRA ADICIÓN, SE OBTIENE:

$$a_3 + \dots + a_{3n} = (15n+12)n$$

LO PEDIDO SE REDUCE A:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{15n^2+22n+7} - \sqrt{15n^2+12n})$$

RACIONALIZANDO:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+7}{\sqrt{15n^2+22n+7} + \sqrt{15n^2+12n}}$$

DE AQUÍ: $L = \frac{10}{\sqrt{15} + \sqrt{15}} = \frac{10}{2\sqrt{15}}$

RACIONALIZANDO: $L = \frac{\sqrt{15}}{3}$

$$(36) \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = 2^{n-1}; a_1 = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \rightarrow \frac{1}{a_2} - 2 = 2 \rightarrow a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$n=3 \rightarrow \frac{1}{a_3} - 4 = 4 \rightarrow a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$n=4 \rightarrow \frac{1}{a_4} - 8 = 8 \rightarrow a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\vdots$$

LO PEDIDO ES:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

SUMA LÍMITE ($r = 1/2$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$(37) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)} = S$$

Obs:

$$S_1 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$$

SUMA CONOCIDA
(VER RESOLUCIÓN (1))

$$S_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

LUEGO:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

ADemás DICHA FRACCIÓN DESCOM-
PUESTA EN FRACCIONES PARCIALES
(REVISE TEORÍA DE FRACCIONES) ES
EQUIVALENTE A:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

DEA QUE:

$$S = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right)$$

EXTENDIENDO:

$$S = 12 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \dots \right]$$

Obs: LA SUMA DE LOS ELEMENTOS

EN CADA DIAGONAL, VALE 0.

$$S = 12 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] \therefore S = 3$$

(38) Obs: EL NUMERADOR DE CADA
FRACCIÓN ES IGUAL A LA DIFEREN-
CIA DE LOS FACTORES EN SU DENOMI-
NADOR. CON ESTO, CADA FRACCIÓN
SE PUEDE DESCOMPONER COMO SI-
GUE (VERIFIQUE):

$$S = \left(1 - \frac{1}{1 \times 2} \right) + \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{1 \times 2} \right) + \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{1 \times 2} \right) + \dots$$

CANCELANDO, NOS QUEDA:

$$S = 1$$

(39) SEA LO PEDIDO "S":

$$S = \frac{3}{1 \times 4} + \frac{5}{4 \times 9} + \frac{7}{9 \times 16} + \frac{9}{16 \times 25} + \dots$$

SIMILAR A LA RESOLUCIÓN ANTE-
RIOR (VEA LA OBSERVACIÓN):

DESCOMPONIENDO:

$$S = \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25} \right) + \dots$$

CANCELANDO, SE OBTIENE:

$$S = 1$$



Esta obra se terminó de imprimir en los talleres
gráficos de Editorial Cuzcano S.A.C