

مراجعة نظري وتمارين في التفاضل والتكامل المصف الثالث الثانوي

مكتبة توجيه الرياضيات
د. عادل أبو دة

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

نظرية :

الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما $s \leftarrow p$ إذا وفقط إذا كانت نهايتها اليمنى واليسرى عند p موجودتين وكل منهما تساوى ل أى أن : **نهـ** $d(s) = l$ إذا وفقط إذا كان : $s \leftarrow p$

$$d = (p^-) = (p^+)$$

ملاحظات : * عند إيجاد نهاية دالة عندما $s \leftarrow p$ يراعى الآتى :

إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين ويسار p مباشرة يجب بحث كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة ثم مقارنة النهايتين "إن وجدت"

• أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين ويسار p مباشرة فيمكن بحث نهاية

الدالة مباشرة دون بحث النهاية والنهاية اليسرى

* إذا كان : $d = (p^+) \neq d = (p^-)$ فإن : **نهـ** $d(s)$ ليست موجودة $s \leftarrow p$

* إذا كانت الدالة د معرفة على $[p, b]$ أو $[a, p]$ ، ب [فبحث نهاية الدالة عند p نبحث

النهاية اليمنى فقط وإن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند p

ولبحث نهاية الدالة عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط وإن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ب

$$(١) : \text{إذا كانت : } d(s) = \left. \begin{array}{ll} ١ + ٣س & \text{عندما } ١ > س \\ ٥ - س & \text{عندما } ١ < س \end{array} \right\} \text{أوجد كلاً من :}$$

نهـ $d(s)$ ، **نهـ** $d(s)$ $s \leftarrow ١$

الحل

∴ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار $s = ١$ مباشرة وهى : $d(s) = ١ + ٣س$

$$\therefore \text{نهـ } d(s) = \text{نهـ } (١ + ٣س) = ١ + ٣ \times ١ = ٤ \quad s \leftarrow ١$$

∴ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١

∴ يجب بحث كلاً من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى عند $s = ١$

$$\therefore d(١^-) = \text{نهـ } (١ + ٣س) = ١ + ٣ \times ١ = ٤ \quad s \leftarrow ١$$

$$d(١^+) = \text{نهـ } (٥ - س) = ٥ - ١ = ٤ \quad s \leftarrow ١$$

$$\therefore \text{نهـ } d(s) = ٤ \quad s \leftarrow ١$$

$$\therefore d(١^-) = d(١^+) = ٤$$

$$(2) : \text{إذا كانت : د (س) } = \left. \begin{array}{l} \frac{9 - (3 + س)^2}{س} \text{ عندما } س > 0 \\ س + 6 \text{ عندما } س < 0 \end{array} \right\}$$

أوجد نهـاد (س)
س ← ٠

الحـل

$$\begin{aligned} \therefore \text{د (س)} &= \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} \\ &= \frac{9 - (3 + س)^2}{س} = \frac{9 - 9 - 6س - س^2}{س} = \frac{-6س - س^2}{س} = -6 - س \\ &= \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} \\ &= \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{د (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)}$$

$$(3) : \text{إذا كانت : د (س) } = \left. \begin{array}{l} \frac{3}{س} \text{ عندما } س > 0 \\ س \text{ عندما } س < 0 \end{array} \right\}$$

الحـل

$$\begin{aligned} \therefore \text{د (س)} &= \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} \\ &= \frac{3}{س} = \frac{3}{س} = \frac{3}{س} = \frac{3}{س} \\ &= \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} \\ &= \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} = \text{نهـاد (س)} \end{aligned}$$

$$(4) : \text{إذا كانت : د (س) } = \left. \begin{array}{l} \frac{5 - 2س + س^2}{س - 1} \text{ عندما } س > 1 \\ 3س + 5 \text{ عندما } س < 1 \end{array} \right\}$$

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة كل من p

الحـل

$$\begin{aligned} \therefore \text{د (س)} &= \text{نهاية عند س = ١} = ١ \\ &= \frac{(١ - س)(٥ + ٣س)}{س - ١} = \frac{(١ - س)(٥ + ٣س)}{س - ١} \\ &= \text{نهاية عند س = ١} = \text{نهاية عند س = ١} = \text{نهاية عند س = ١} = \text{نهاية عند س = ١} \end{aligned}$$

$$\therefore ٨ = ٥ + p \quad \text{ومنها : } ٣ = p$$

إتصال دالة عند نقطة

تعريف :

إذا كانت الدالة d معرفة على فترة ما وكانت p تنتمى لهذه الفترة فإن :
 d تكون متصلة عند p إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x \rightarrow p} d(x) = d(p)$

شروط إتصال دالة عند نقطة :

تكون الدالة d متصلة عند $s = p$ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ - الدالة معرفة عند $s = p$ أى أن : $d(p)$ لها وجود

٢ - $\lim_{x \rightarrow p} d(x)$ لها وجود

٣ - $\lim_{x \rightarrow p} d(x) = d(p)$

ملاحظة :

يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة لعدم إتصال الدالة d عند النقطة $s = p$
 فمثلاً إذا كانت الدالة غير معرفة عند $s = p$ فهي بالتالى غير متصلة عند $s = p$
 ولا داعى أن نبحث عن تحقق الشرطين الآخرين

(١): ابحث إتصال الدالة : $d(s) = |s - 1| + 3$ عند $s = 1$
 الحل

$$d(s) = \begin{cases} s - 1 + 3, & s \leq 1 \\ -s + 1 + 3, & s > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s + 2, & s \leq 1 \\ s - 4, & s > 1 \end{cases}$$

∴ معرفة عند $s = 1$ حيث : $d(1) = 1 + 2 = 3$

$$d(1^-) = \lim_{s \rightarrow 1^-} (s + 2) = 3$$

$$d(1^+) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (s - 4) = -3$$

$$\text{أى أن : } d(1) = \lim_{s \rightarrow 1^-} d(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} d(s) = 3$$

∴ d متصلة عند $s = 1$

ملاحظة :

إذا كانت $d(s)$ معرفة عند $s = p$ ، $\lim_{x \rightarrow p} d(x)$ لها وجود ، وكانت الدالة غير متصلة

عند $s = p$ لإختلاف $d(p)$ عن $\lim_{x \rightarrow p} d(x)$ فيمكن جعل الدالة متصلة عند $s = p$

بإعادة تعريفها بجعل $d(p) = \lim_{x \rightarrow p} d(x)$

إتصال دالة على فترة

تعريف :

- (١) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [p ، ب] فإن :
- الدالة د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة
- (٢) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [p ، ب] فإن :
- الدالة د تكون متصلة على ف إذا تحققت الشروط الآتية :
- پ - الدالة د متصلة على الفترة ف = [p ، ب]
- ب - الدالة د متصلة من اليمين عند پ أى : د (پ⁺) = نهـ_{پ ←} د (س)
- ح - الدالة د متصلة من اليمين عند پ أى : د (پ⁻) = نهـ_{پ ←} د (س)

ملاحظة :

- الدالة د غير متصلة على الفترة ف = [p ، ب] إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل ح د \Rightarrow ف بحيث تكون د غير متصلة عندها أى إذا لم تتحقق إحدى الشروط :
- پ - الدالة د غير معرفة عند ح
- ب - عدم وجود نهاية للدالة د عند ح
- ح - إختلاف نهاية الدالة د عند ح عن د (ح)

بعض أنماط الدوال المتصلة :

- (١) دوال كثيرات الحدود : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
- (٢) الدوال الكسرية الجبرية : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ما عدا عند أصفار دالة المقام
- (٣) الدوال المثلثية :

- * دالة الجيب : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
- * دالة جيب التمام : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
- * دالة الظل : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
- ما عدا عند النقط $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ط حيث $\sqrt{2} \in \sqrt{2}$

$$(١) : \text{أبحث إتصال الدالة د حيث د (س)} = \left. \begin{array}{l} ١ + س^٣ ، \quad ٣ - س \geq ٣ > ٢ \\ ٣ + س^٢ ، \quad ٢ \geq س \geq ٥ \end{array} \right\}$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{د (س) معرفة على } [٥ ، ٣ -] \\ (١) \text{ د (س)} = ١ + س^٣ \quad \text{لكل س } \in [٣ - ، ٢] \\ \therefore \text{د (س) كثيرة حدود} \quad \therefore \text{د (س) متصلة على } [٣ - ، ٢] \\ (٢) \text{ د (س)} = ٣ + س^٢ \quad \text{لكل س } \in [٥ ، ٢] \\ \therefore \text{د (س) كثيرة حدود} \quad \therefore \text{د (س) متصلة على } [٥ ، ٢] \\ (٣) \text{ د (٢)} = ٣ + ٤ = ٧ \end{aligned}$$

$$\text{، نهـ} \substack{١ + س^٣ \\ ٢ \leftarrow} = ٧ \quad ، \quad \text{، نهـ} \substack{٣ + س^٢ \\ ٢ \leftarrow} = ٧$$

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٦) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

$$\therefore \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٢) \quad \therefore \text{د (س)} \text{ متصلة عند } \text{س} = ٢$$

$$\text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٣ -) \quad \therefore \text{د (س)} \text{ متصلة من اليمين عند } \text{س} = ٣ \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (١ + \text{س} ٣) \quad \therefore \text{د (س)} \text{ متصلة من اليسار عند } \text{س} = ٣$$

$$\text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٥) \quad \therefore \text{د (س)} \text{ متصلة من اليسار عند } \text{س} = ٥$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نستنتج أن د (س) متصلة على [٥ ، ٣ -]

$$(٢) : \text{أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د (س) = } \left. \begin{array}{l} ٣ \text{ س} + \text{ك} \\ ١ - \text{ك س} \end{array} \right\} \text{ ، } \text{س} \geq ٢ \text{ ، } \text{س} < ٢$$

الحـل \therefore د متصلة على ح \therefore د متصلة على س = ٢

$$\therefore \text{د (س)} = (٢ -) \text{ د (س)} = (٢ +)$$

$$٣ \times ٢ + \text{ك} = ٦ + \text{ك}$$

$$\text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٢ -) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٣ \text{ س} + \text{ك}) \quad \text{س} \leftarrow ٢$$

$$\text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٢ +) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (١ - \text{ك س}) \quad \text{س} \leftarrow ٢$$

$$\therefore ٦ + \text{ك} = ١ - \text{ك} \quad \therefore ٥ = \text{ك} \quad \therefore ١ = \text{ك}$$

(٣) : إذا كانت الدالة د متصلة على ح أوجد قيمة كل من : م ، ب حيث :

$$\left. \begin{array}{l} ٣ - \text{س} \\ \text{م س} + \text{ب} \\ \text{س}^٢ - ١٢ \end{array} \right\} \text{ د (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س} \geq ٢ \\ \text{س} > ٢ \\ \text{س} \leq ٥ \end{array} \right\}$$

الحـل \therefore د متصلة على ح \therefore د متصلة على س = ٢

$$\therefore \text{د (س)} = (٢ -) \text{ د (س)} = (٢ -) \text{ د (س)} = (٢ +)$$

$$٣ \times ٢ - ٢ = ٨ = \text{ب} + \text{م} ٢$$

$$\therefore \text{د (س)} = (٢ -) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٢ -) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٢ +)$$

$$\therefore \text{د (س)} \text{ متصلة على س} = ٥$$

$$\therefore \text{د (س)} \text{ متصلة على ح}$$

$$\therefore \text{د (س)} = (٥) \text{ د (س)} = (٥ -) \text{ د (س)} = (٥ +)$$

$$\text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (٥) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (١٢ - ٥) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (١٣ + ٥)$$

$$\therefore \text{د (س)} = (١٣) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (١٣) \quad \text{نهـ} \quad \text{د (س)} = (١٣)$$

$$\text{بالتعويض فى (١) : } \text{ب} = ٢ \quad \therefore \text{م} = ٣ \quad \text{بالتعويض فى (٢) : } \text{م} = ٧ \quad \text{ب} = ٢١$$

الإشتقاق

بحث قابلية إشتقاق دالة عند النقطة s ، فيجب البحث فى المقدار :

نهـ $\frac{d(s+h) - d(s)}{h}$ فإذا كان لهذه النهاية وجود كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند s ، وقيمة المشتقة عندها تساوى هذه النهاية

المشتقة اليمنى و المشتقة اليسرى للدالة :

إذا كانت النقطة $s = p$ تنتمى لمجال الدالة d وكانت الدالة تتغير قاعدتها على يمين و يسار p

لبحث قابلية إشتقاق الدالة عند $s = p$

نوجد المشتقة اليمنى $d^+(p) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(p+h) - d(p)}{h}$ نهـ

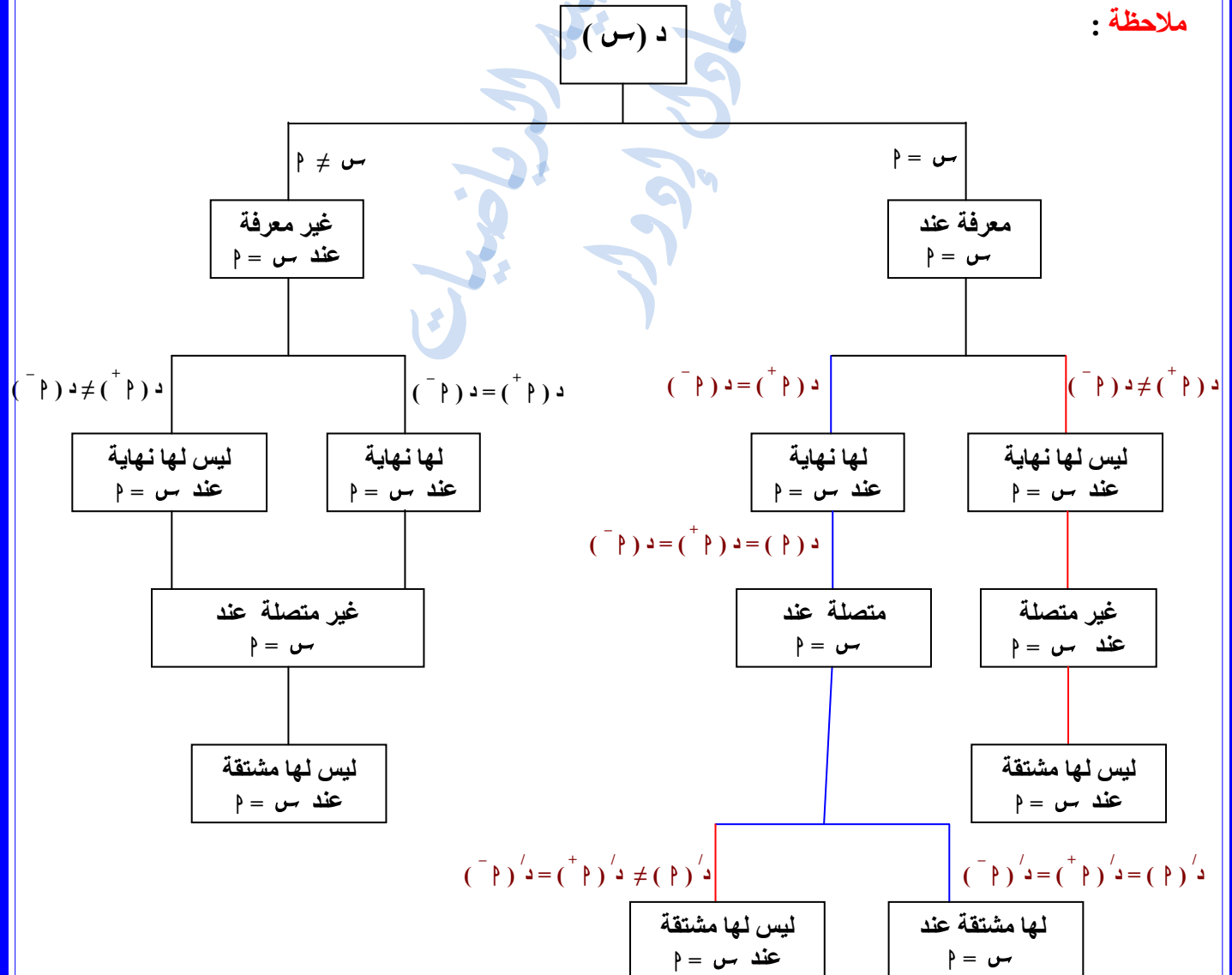
، المشتقة اليسرى $d^-(p) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{d(p-h) - d(p)}{-h}$ نهـ

فإذا تحقق أن : $d^+(p) = d^-(p)$ كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند $s = p$ وكان :

$$d^-(p) = d^+(p) = d'(p)$$

أما إذا كان : $d^-(p) \neq d^+(p)$ كانت الدالة غير قابلة للإشتقاق عند $s = p$

ملاحظة :



مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٨) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

$$(1) : \text{إذا كانت : د (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 , \text{ س} \geq 1 \\ \text{س}^2 + 1 , \text{ س} < 1 \end{array} \right\} \text{ أبحث إتصال د ، قابلية إستتقاق د عند س = 1}$$

الحل

$$\therefore \text{د}(-1) = (-1)^2 = 1 , \text{د}^+(-1) = (-1)^2 = 1 , \text{د}^-(1) = (1)^2 = 1 , \text{د}^+(1) = (1)^2 = 1 \therefore \text{د}(-1) = \text{د}^+(-1) = \text{د}^-(1) = \text{د}^+(1) = 1$$

$$\therefore \text{د}^+(-1) = \lim_{\text{هـ} \rightarrow -1^+} \frac{(-1) - (\text{هـ} + 1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \rightarrow -1^+} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -1$$

$$\therefore \text{د}^-(1) = \lim_{\text{هـ} \rightarrow 1^-} \frac{(1) - (\text{هـ} + 1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \rightarrow 1^-} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -1$$

$$\therefore \text{د}^+(-1) = \text{د}^-(1) = -1 \therefore \text{د (س) قابلة للإشتقاق عند س = 1}$$

$$(2) \text{ إبحث قابلية إستتقاق الدالة : د (س) = |س - ٢| عند س = ٢ و أبحث إتصال الدالة عند س = ٢}$$

الحل

$$\text{د (س) = } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} - ٢ , \text{ س} > ٢ \\ ٢ - \text{س} , \text{ س} \leq ٢ \end{array} \right.$$

$$\therefore \text{د}(-2) = (-2) - ٢ = -4 , \text{د}^+(-2) = (-2) - ٢ = -4 , \text{د}^-(2) = (2) - ٢ = 0 \therefore \text{د}(-2) = \text{د}^+(-2) = \text{د}^-(2) = 0$$

$$\therefore \text{د}^+(-2) = \lim_{\text{هـ} \rightarrow -2^+} \frac{(-2) - (\text{هـ} + 2)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \rightarrow -2^+} \frac{-\text{هـ} - 4}{\text{هـ}} = -1$$

$$\therefore \text{د}^-(2) = \lim_{\text{هـ} \rightarrow 2^-} \frac{(2) - (\text{هـ} + 2)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \rightarrow 2^-} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -1$$

$$\therefore \text{د}^+(-2) \neq \text{د}^-(2) \therefore \text{د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ٢}$$

نظرية : إذا كانت : الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عند س = م فإنها تكون متصلة عند س = م

بحث إستتقاق دالة على فترة مغلقة :

إذا كانت الدالة ص = د (س) معرفة على [م ، ب] فليبحث الإستتقاق فى هذه الفترة نتبع :

١ - نبحث قابلية الإستتقاق على [م ، ب]

٢ - نبحث قابلية الإستتقاق عند س = م ببحث وجود المشتقة اليمنى فقط

٣ - نبحث قابلية الإستتقاق عند س = ب ببحث وجود المشتقة اليسرى فقط

$$(1) : \text{أبحث قابلية إستتقاق الدالة د (س) = س - ٣ عند أى نقطة من مجالها}$$

الحل

$$\text{مجال د} =] ٠ , \infty [$$

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (١٠) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

** الدالة سواء كانت صريحة أو ضمنية يكون لها نفس المشتقة الأولى و نحصل عليها بالإشتقاق بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص

(١) أوجد $\frac{ع}{س}$ فى كل من العلاقات الآتية

Ⓐ حـ ٣ ص - جـ ٢ س = ٠ بـ س جـ ٢ ص + ص جـ ٢ س = ١

الحـل

Ⓐ بالإشتقاق بالنسبة لـ س :

$$3 \text{ حـ} 3 \text{ ص} - \frac{ع}{س} 2 \text{ جـ} 2 \text{ س} = 0 \iff 3 \text{ جـ} 2 \text{ ص} - \frac{ع}{س} 2 \text{ جـ} 2 \text{ س} = 0$$

أى أن : $\frac{ع}{س} = \frac{3 \text{ جـ} 2 \text{ ص}}{2 \text{ جـ} 2 \text{ س}}$

بـ (س × - جـ ٢ ص + $\frac{ع}{س}$ جـ ٢ ص) + (ص × ٢ جـ ٢ س + جـ ٢ س × $\frac{ع}{س}$) = ٠

$$- \text{س} \times \text{جـ} ٢ \text{ ص} + \frac{ع}{س} \text{جـ} ٢ \text{ ص} + \text{ص} \times ٢ \text{ جـ} ٢ \text{ س} + \frac{ع}{س} ٢ \text{ جـ} ٢ \text{ س} = ٠$$

$$(\text{جـ} ٢ \text{ س} - \text{س جـ} ٢ \text{ ص}) \frac{ع}{س} = ٢ \text{ جـ} ٢ \text{ س} - ٢ \text{ جـ} ٢ \text{ ص}$$

$$\therefore \frac{ع}{س} = \frac{٢ \text{ جـ} ٢ \text{ س} - ٢ \text{ جـ} ٢ \text{ ص}}{\text{جـ} ٢ \text{ س} - \text{س جـ} ٢ \text{ ص}}$$

(٢) : أوجد ميل المماس للمنحنى : $س' + ص' + ٣س - ٤ص = ١$ عند النقطة (١ ، ٣)

الحـل

بالإشتقاق بالنسبة لـ س :

$$٢س + ٢ص - \frac{ع}{س} ٤ + ٣ = ٠$$

$$\text{أى أن : } \frac{ع}{س} = \frac{٣ - ٢س}{٤ - ٢ص}$$

$$\text{ميل المماس} = \left(\frac{ع}{س} \right)_{(١, ٣)} = \frac{٣ - ٢}{٤ - ٦} = \frac{١}{٢}$$

(٣) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

: $س' + ص' - ٦س - ٨ص = ١٧$ عند النقطة (١ ، ٢)

الحـل

بالإشتقاق بالنسبة لـ س :

$$٢س + ٢ص - \frac{ع}{س} ٨ - ٦ = ٠$$

$$\text{أى أن : } \frac{ع}{س} = \frac{٣ - ٦س}{٨ - ٢ص}$$

$$\text{ميل المماس} = \left(\frac{ع}{س} \right)_{(١, ٢)} = \frac{٣ - ٦}{٨ - ٤} = \frac{١}{٢} \therefore \text{المماس يصنع زاوية } ١٣٥^\circ$$

المشتقات العليا

إذا كانت الدالة $v = d(s)$ قابلة للإشتقاق عدة مرات نحصل على المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة وهكذا على التوالى

يرمز للمشتقة الثانية بأحد الرموز: $\frac{d^2v}{ds^2}$ أو $\frac{d^2}{ds^2} d(s)$ أو $d''(s)$ أو v''

و يرمز للمشتقة الثالثة بأحد الرموز: $\frac{d^3v}{ds^3}$ أو $\frac{d^3}{ds^3} d(s)$ أو $d'''(s)$ أو v'''

وهكذا
ومن تعريف المشتقات يكون: $\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \right)$ ، $\frac{d^3v}{ds^3} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right)$ وهكذا

(١) إذا كانت: $v = s^5 + 3s^4 - 4s^3 + 6s^2 + 5s$ أوجد $\frac{d^2v}{ds^2}$

الحل

$$\begin{aligned} v' &= 5s^4 + 12s^3 - 12s^2 + 12s + 5 \\ v'' &= 20s^3 + 36s^2 - 24s + 12 \\ \frac{d^2v}{ds^2} &= 20s^3 + 36s^2 - 24s + 12 \end{aligned}$$

(٢) إذا كانت $v = s^3 + 2$ ، $e = s^3 + 3$ أوجد $\frac{d^2e}{ds^2}$ عندما $s = 2$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= 3s^2 \quad , \quad \frac{de}{ds} = 3s^2 \\ \therefore \frac{d^2e}{ds^2} &= \frac{de}{ds} \times \frac{dv}{ds} = 3s^2 \times 3s^2 = 9s^4 \\ \frac{1}{3s^2} \times \left(\frac{de}{ds} \right) \frac{dv}{ds} &= \frac{de}{ds} \times \left(\frac{dv}{ds} \right) \frac{dv}{ds} = \frac{d^2e}{ds^2} \\ \frac{1}{3s^2} &= \frac{d^2e}{ds^2} \quad \text{فإن:} \quad \frac{d^2e}{ds^2} = \frac{1}{3s^2} \times \frac{1}{3s^2} = \frac{1}{9s^4} \end{aligned}$$

(٣) إذا كان: $s = v$ حتا s أثبت أن: $s = \frac{d^2v}{ds^2} + 2$ عندما $s = 0$

الحل

$$\begin{aligned} s &= v + \frac{d^2v}{ds^2} - \text{حسا} \\ s &= \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{dv}{ds} + \frac{dv}{ds} - \text{حسا} \\ \therefore s &= \frac{d^2v}{ds^2} + 2 \quad \text{عندما } s = 0 \end{aligned}$$

تطبيقات هندسية على المشتقة الأولى

نعلم أن :

**** طرق إيجاد ميل الخط المستقيم "**

(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين :

$$\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = م \quad \text{ب (س, ص) ، ب (س, ص) هو :}$$

(٢) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي : $ص = م س + ح$ فإن ميل الخط المستقيم هو : م

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي : $م س + ب ص + ح = ٠$

$$\text{فإن ميل الخط المستقيم هو : } م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{م}{ب}$$

(٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ه هو : $م = ط ه$

و يكون : $م = ٠$ إذا كان المستقيم يوازي محور السينات

، $م < ٠$ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع إتجاه الموجب لمحور السينات

، $م > ٠$ إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع إتجاه الموجب لمحور السينات

ملاحظة :

إذا كان : $م_١ ، م_٢$ ميلا للمستقيمان $ل_١ ، ل_٢$ فإن :

$$ل_١ // ل_٢ \text{ إذا كان : } م_١ = م_٢ , \quad ل_١ \perp ل_٢ \text{ إذا كان : } م_١ \times م_٢ = -١$$

**** تعاريف وقواعد عامة "**

(١) أى نقطة تقع على منحنى تحقق معادلته

(٢) لإيجاد نقط تقاطع منحنين متقاطعين تحل معادلتيهما معاً

(٣) ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٤) العمودى على منحنى عند نقطة عليه هو المستقيم العمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٥) زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم و المماس للمنحنى عند

نقطة التقاطع

(٦) زاوية التقاطع بين منحنين هى الزاوية بين المماسيين للمنحنى عند نقط تقاطع المنحنيين

، إذا كان قياس الزاوية بين المماسيين لمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين قائمة

كان المنحنيان متقاطعين على التعامد

**** استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس و العمودى على منحنى "**

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = د(س)$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$

$$\text{الواقعة عليه} = \left(\frac{ص}{س} \right) (س_١ ، ص_١)$$

(٢) ميل العمودى على منحنى الدالة $ص = د(س)$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$

$$\text{الواقعة عليه} = \left(\frac{ص}{س} \right) (س_١ ، ص_١)$$

(٣) المماس لمنحنى الدالة $ص = د(س)$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ الواقعة عليه يصنع زاوية

قياسها ه مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

$$\text{ط هـ} = \left(\frac{e_v}{e_s} \right) (s_1, v_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} = \text{صفر} \quad \text{إذا كان المماس يوازي محور السينات} \\ < \quad \text{إذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه} \\ \quad \text{الموجب لمحور السينات} \\ > \quad \text{إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه} \\ \quad \text{الموجب لمحور السينات} \\ \text{غير معرف } \left(\frac{1}{e} \right) \quad \text{إذا كان المماس يوازي محور الصادات} \end{array} \right\} \text{و يكون : } \left(\frac{e_v}{e_s} \right) (s_1, v_1)$$

**** الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :**

(١) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (s_1, v_1) ، وميله m

$$\text{هى : } m = \frac{v - v_1}{s - s_1} \quad \text{أو} \quad m(s - s_1) = v - v_1$$

(٢) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (s_1, v_1) ، (s_2, v_2) : هى :

$$\frac{v - v_1}{s - s_1} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1}$$

حالات خاصة :

(١) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات و يمر بالنقطة $(0, d)$: هى : $v = d$

(٢) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات و يمر بالنقطة $(0, l)$: هى : $s = l$

(٣) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و $(0, 0)$: هى : $v = ms$

حيث : " m هو ميل المستقيم "

**** معادلتا المماس و العمودى لمنحنى :**

(١) معادلة المماس للمنحنى $v = d(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) : هى :

$$v - v_1 = m(s - s_1) \quad \text{حيث : } m = \left(\frac{e_v}{e_s} \right) (s_1, v_1)$$

(٢) معادلة العمودى للمنحنى $v = d(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) : هى :

$$v - v_1 = \frac{1}{m}(s - s_1) \quad \text{حيث : } m = \left(\frac{e_v}{e_s} \right) (s_1, v_1)$$

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (١٤) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

(١) أثبت النقطة (٢ ، ١) تقع على المنحنى $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص = ٥$ ثم أوجد

معادلتى المماس و العمودى للمنحنى عندها

الحل

بالتعويض عن $س = ١$ ، $ص = ٢$ نجد :

$$\text{الطرف الأيمن} = (١)^٢ + (٢)^٢ - ٤ \times ١ + ٢ \times ٢ = ٥ = \text{الطرف الأيسر}$$

∴ النقطة (٢ ، ١) تقع على المنحنى

$$\text{بالاشتقاق بالنسبة لـ } س \quad ∴ ٢س + ص = \frac{٤ص}{س} + ٢ \quad ∴ \frac{٢ص}{س} = \frac{٤ص}{س} - ٢$$

$$\quad ∴ \frac{٢ص}{س} = \frac{٤ص - ٢ص}{س} = \frac{٢ص}{س}$$

$$\quad ∴ \text{ميل المماس للمنحنى عند النقطة } (٢، ١) = \left(\frac{٢ص}{س} \right)_{(٢، ١)} = \frac{١ - ٢}{١ + ٢} = -\frac{١}{٣}$$

∴ معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة هي :

$$\frac{١}{٣} = \frac{ص - ٢}{س - ١} \quad \text{أى : } ٣ص - ٦ = س - ١ \quad ∴ ٣ص - س = ٥ = \text{صفر}$$

، ميل العمودى للمنحنى عند نفس النقطة $\frac{٣}{١}$ ،

∴ معادلة العمودى للمنحنى عند نفس النقطة هي :

$$\frac{٣}{١} = \frac{ص - ٢}{س - ١} \quad \text{أى : } ٣ص - ٦ = س - ١ \quad ∴ ٣ص + س = ٥ = \text{صفر}$$

(٢) أثبت أن المنحنيين $ص = ٢س + س + ١$ ، $ص = س - س^٢$ متماسان و أوجد

معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس

الحل

بحل معادلتى المنحنيين معاً نحصل على نقط التقاطع

$$٢س + س + ١ = س - س^٢ \quad ∴ ٢س + س + ١ = س - س^٢$$

$$\quad ∴ ٢س + س + ١ = س - س^٢$$

$$\quad ∴ ١ = س$$

، بالتعويض عن قيمة س فى معادلة المنحنى الأول ،

$$\quad ∴ ٢ = (١ - س) = (١ - ١) = ٠ \quad ∴ \text{المنحنيان يتقاطعان فى النقطة } (١ - ، ٢)$$

م ، " ميل المماس لمنحنى الأول عند النقطة (١ - ، ٢) "

$$٣ - = ١ + ١ \times ٤ = ١ + س = \left(\frac{٤ص}{س} \right)_{(١ - ، ٢)} =$$

، م ، " ميل المماس لمنحنى الثانى عند النقطة (١ - ، ٢) "

$$٣ - = ١ - ١ \times ٢ = ١ - س = \left(\frac{٤ص}{س} \right)_{(١ - ، ٢)} =$$

$$\quad ∴ ٣ = ٣ \quad \text{عند النقطة } (١ - ، ٢) \quad ∴ \text{المنحنيان متماسان عند النقطة } (١ - ، ٢)$$

معادلة المماس المشترك هي :

$$\frac{٣ -}{١ + س} = ٣ - \quad \text{أى : } ٣ - = ٣ - س \quad ∴ ٣ + س = ١ = \text{صفر}$$

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (١٥) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

(٣) إذا كان المنحنيين $ص = ٢س + ل$ و $ص = ٨س + ل$ ، $ص = ٩س + ل$ يتقاطعان على
التعامد أوجد قيمة ل

الحل

بحل معادلتى المنحنيين معاً نحصل على نقط التقاطع

$$٢س + ل = ٨س + ل \Rightarrow ٩ = ٦س \Rightarrow ١.٥ = س$$

$$١ = ٢س \Rightarrow ١ = ٣س \Rightarrow ١ = ٣س$$

$$\frac{٦ص}{٦س} \text{ للمنحنى الأول } = ٤س + ل$$

$$\frac{٦ص}{٦س} \text{ للمنحنى الثانى } = ٢س + ل$$

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد

$$\frac{٦ص}{٦س} \text{ للمنحنى الأول } \times \frac{٦ص}{٦س} \text{ للمنحنى الثانى } = ١ -$$

$$١ = (٤س + ل)(٢س + ل)$$

$$\text{عندما } ١ = ٤س + ل \Rightarrow ١ = ٢س + ل \Rightarrow ١ = ٢س + ل$$

$$\text{عندما } ١ = ٢س + ل \Rightarrow ١ = ٤س + ل \Rightarrow ١ = ٤س + ل$$

(٤) أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = ٢س + ل$ حتا $س = ٠$ عند النقطة $س = ٠$

الحل

بالتعويض عن $س = ٠$ فى معادلة المنحنى

$$١ = ٢س + ل \Rightarrow ١ = ٠ + ل \Rightarrow ١ = ل$$

∴ النقطة (١ ، ٠) تقع على المنحنى

$$م = \frac{٦ص}{٦س} = ٢س + ل$$

$$\therefore م = \text{" ميل المماس للمنحنى " } = \left(\frac{٦ص}{٦س} \right)_{(١, ٠)} = ٢$$

∴ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ٠) هى :

$$٢ = \frac{١ - ص}{٠ - س} \Rightarrow ٢(٠ - س) = ١ - ص \Rightarrow ٢س = ١ - ص$$

المعدلات الزمنية المرتبطة

تذكر ما يأتى :

المثلث	<p>المحيط = مجموع أطوال أضلاعه</p> <p>المساحة = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة \times الارتفاع</p> <p>$\frac{1}{2}$ = حاصل ضرب طولى ضلعين \times حيب الزاوية المحصورة بينهما</p>
متوازى الأضلاع	<p>المحيط = مجموع طولى ضلعين متجاورين $\times 2$</p> <p>المساحة = طول القاعدة \times الارتفاع المناظر لها</p>
المستطيل	<p>المحيط = (الطول + العرض) $\times 2$</p> <p>المساحة = الطول \times العرض</p>
المربع	<p>المحيط = طول الضلع $\times 4$</p> <p>المساحة = مربع طول الضلع</p> <p>$\frac{1}{2}$ = مربع طول قطره</p>
المعين	<p>المحيط = طول الضلع $\times 4$</p> <p>المساحة = طول الضلع \times الارتفاع</p> <p>$\frac{1}{2}$ = حاصل ضرب طول قطريه</p>
شبه المنحرف	<p>المحيط = مجموع أطوال أضلاعه</p> <p>المساحة = $\frac{1}{2}$ مجموع طولى القاعدتين المتوازيتين \times الارتفاع</p> <p>= طول القاعدة المتوسطة \times الارتفاع</p>
الدائرة	<p>المحيط = $2\pi r$</p> <p>المساحة = πr^2</p> <p>حيث : " r " طول نصف قطر الدائرة "</p>
المكعب	<p>المساحة الجانبية = $4l^2$</p> <p>المساحة الكلية = $6l^2$</p> <p>الحجم = l^3</p> <p>حيث : " l " طول حرفه = " l "</p>
متوازى المستطيلات	<p>المساحة الجانبية = $2(s + v) \times e$</p> <p>المساحة الكلية = $2(s + v + e) \times s$</p> <p>الحجم = $s \times v \times e$</p> <p>حيث : " s " أبعاد القاعدة هما s ، v ، الارتفاع = e "</p>
المنشور القائم	<p>المساحة الجانبية = محيط القاعدة \times الارتفاع</p> <p>المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة</p> <p>الحجم = مساحة القاعدة \times الارتفاع</p>
الأسطوانة الدائرية القائمة	<p>المساحة الجانبية = $2\pi r \times e$</p> <p>المساحة الكلية = $2\pi r(e + r)$</p> <p>الحجم = $\pi r^2 \times e$</p> <p>حيث : " r " طول نصف قطر القاعدة = " r " الارتفاع = e "</p>
الكرة	<p>المساحة = $4\pi r^2$</p> <p>الحجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$</p> <p>حيث : " r " طول نصف القطر = " r "</p>

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (١٧) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

إذا وجدت علاقة بين عدة متغيرات : س ، ص ، ع ، ... ، مثلاً
باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن t تنتج علاقة بين المعدلات الزمنية لهذه المتغيرات :

$$\frac{ds}{dt} , \frac{dv}{dt} , \frac{dc}{dt}$$

خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :

- تحديد المعطى والمطلوب مع الرسم إن أمكن
- ايجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات في المعطى والمطلوب
- اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن
- التعويض بالمعطى لاجاد المطلوب

بعض المعدلات التي تظهر في مسائل المعدلات الزمنية :

- ❖ معدل تغير الحجم بالنسبة للزمن $\frac{dV}{dt} =$
- ❖ معدل تغير نصف القطر بالنسبة للزمن $\frac{dr}{dt} =$
- ❖ معدل تغير س بالنسبة للزمن أو سرعة الجسم في اتجاه المحور السيني $\frac{ds}{dt} =$
- ❖ معدل تغير ص بالنسبة للزمن أو سرعة الجسم في اتجاه المحور الصادي $\frac{dv}{dt} =$

ملاحظات :

- ✓ إذا كان معدل التغير يزداد تكون اشارته موجبة { مثلاً : يتمدد ، يبتعد ، يصب ماء }
- ✓ إذا كان معدل التغير يتناقص تكون اشارته سالبة { مثلاً : يتسرب ، يقترب ، ينزلق }
- ✓ العلاقة الرياضية يمكن أن تكون { محيط ، مساحة ، حجم ، نظرية فيثاغورس ، تشابه مثلثات ، أو علاقة معطاة في السؤال ... }
- ✓ التعويض بالمعطى يكون بعد اشتقاق العلاقة

(١) : ألقي حجر في بحيرة راكدة فأحدث موجة دائرية ، فإذا كان معدل تزايد نصف قطر الموجة يساوي ٣.٥ سم/ث أوجد معدل التغير في مساحة سطح الموجة عندما يكون نصف قطرها ٥ سم

الحل

نفرض أن طول نصف قطر الموجة = r سم ، مساحة سطحها = M سم^٢

$$\therefore \frac{dr}{dt} = 3.5 \text{ سم/ث}$$

$$\therefore M = \pi r^2$$

، بالإشتقاق بالنسبة للزمن t

$$\therefore \frac{dM}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

بالتعويض ينتج

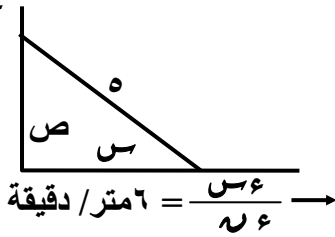
$$\frac{dM}{dt} = 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times 3.5 = 110 \text{ سم}^2/\text{ث}$$

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (١٨) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

(٢) : سلم طوله ٥ مترأ يستند بأحد طرفيه على أرض أفقية وبالطرف الثاني على حائط رأسي ، فإذا كانت قاعدة السلم تنزلق مبتعدة عن الحائط بمعدل ٦ متر/دقيقة ، فأوجد معدل انزلاق الطرف الآخر للسلم على الحائط في اللحظة التي تكون فيها قاعدة السلم على بعد ٣ متر من الحائط

الحل

$$v = \frac{ds}{dt} = ?$$



$$\text{من الشكل : } s^2 + v^2 = 25$$

$$2s \frac{ds}{dt} + 2v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\text{عندما } s = 3 \text{ فإن : } 2 \times 3 \times 6 + 2v \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = 4 \text{ متر/دقيقة}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -\frac{6}{4} = -1.5 \text{ متر/دقيقة}$$

(٣) : يمشي رجل بسرعة ٧ م / ث فى شارع أفقي باتجاه مصباح معلق على ارتفاع ٦ م من سطح الشارع فإذا كان طول الرجل ١.٨ سم ، فأوجد معدل تغير طول ظل الرجل

الحل

من هندسة الشكل : يتشابه المثلثان

$$\frac{1.8}{6} = \frac{s}{s+v}$$

$$\therefore 10s = 3(s+v) \Rightarrow 7s = 3v$$

$$\therefore v = \frac{7}{3}s$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{7}{3} \frac{ds}{dt} = \frac{7}{3} \times 3 = 7 \text{ م / ث}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 7 \text{ م / ث}$$

(٤) : تتحرك نقطة على المنحنى : $v = 5 - s^3$ بحيث يتناقص إحداثيها الصادى بمعدل ١ وحدة / ث

أوجد معدل تغير ميل المنحنى بالنسبة للزمن عندما $s = 3$

الحل

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -3s^2 \frac{ds}{dt} = -3 \times 9 \times (-1) = 27 \text{ وحدة / ث}$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{dv/dt}{ds/dt} = \frac{27}{-9} = -3$$

$$v' = 5 - 3s^2 = 5 - 27 = -22$$

$$\therefore \frac{dv'}{ds} = -6s = -18 \text{ وحدة / ث}$$

سلوك الدالة ورسم منحناها

تذكر ما يأتى :

إشارة المقدار الجبرى

(١) أبحث إشارة المقدار : د (س) = س - ٣

الحل

د (س) = ٠ عندما س = ٣ أى عندما س = ٣
تكون د (س) موجبة عندما س ∈ [٣ ، ∞) أى عندما س > ٣
تكون د (س) سالبة عندما س ∈ [-∞ ، ٣) أى عندما س < ٣

(٢) أبحث إشارة المقدار : د (س) = ٣ - ٤

الحل

د (س) = ٠ عندما ٣ - ٤ = ٠ أى عندما س = $\frac{4}{3}$
تكون د (س) سالبة عندما س ∈ [$\frac{4}{3}$ ، ∞) أى عندما س > $\frac{4}{3}$
تكون د (س) موجبة عندما س ∈ [-∞ ، $\frac{4}{3}$) أى عندما س < $\frac{4}{3}$

(٣) أبحث إشارة المقدار : د (س) = س - ١ + ٣

الحل

فإن : المميز = ١ - ٤ × ١ × ٣ = ٣ - ١ > ٠
∴ د (س) موجبة لكل س ∈ ح

(٤) أبحث إشارة الدالة : د (س) = س - ٢ - ٣

الحل

المميز = ٤ - ٣ × ١ × ٣ = ٨ - ٩ < ٠
∴ د (س) سالبة لكل س ∈ ح

(٥) أبحث إشارة الدالة : د (س) = س - ٨ + ١٦

فإن د (س) = (س - ٤)² أى أن : الجذران حقيقيان متساويان " لاحظ أن المميز = ٠ "
∴ د (س) = ٠ عندما س = ٤
∴ د (س) تكون موجبة عندما س ∈ ح - { ٤ }

(٦) أبحث إشارة الدالة د (س) = ١٠ - س - س² = ٢٥

الحل

د (س) = (س - ٥) - (س - ٥)² = ٥ - س
∴ د (س) = ٠ عندما س = ٥
∴ د (س) تكون سالبة عندما س ∈ ح - { ٥ }

(٧) أبحث إشارة الدالة : د (س) = س^٤ - ٥س + ٤

الحل

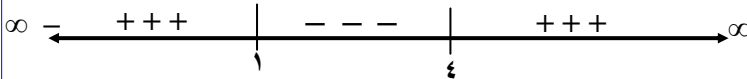
فإن : د (س) = (س - ١)(س - ٤)

أى أن : الجذران حقيقيان مختلفان " لاحظ أن المميز > ٠ "

∴ د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٤}

، د (س) سالبة عندما س ∈]١ ، ٤[

، د (س) موجبة عندما س ∈]-∞ ، ١[∪]٤ ، ∞[



(٨) أبحث إشارة الدالة : د (س) = س^٣ - ٣س - ١٠

الحل

د (س) = (س - ٥)(س + ٢)

∴ د (س) = ٠ عندما س ∈ {٥ ، -٢}

، د (س) سالبة عندما س ∈]٥ ، -٢[

، د (س) موجبة عندما س ∈]-∞ ، -٢[∪]٥ ، ∞[

تزايد و تناقص الدوال :

إستخدام المشتقة الأولى لدراسة التزايد و التناقص :

نظرية : لتكن الدالة د (س) قابلة للإشتقاق فى [ب ، پ] :

١ - تكون د متزايدة على [ب ، پ] إذا كانت د' (س) > ٠ للصفر لكل س ∈ [ب ، پ]

٢ - تكون د متناقصة على [ب ، پ] إذا كانت د' (س) < ٠ للصفر لكل س ∈ [ب ، پ]

*** خطوات إيجاد فترات التزايد و التناقص لدالة :**

١ - نوجد المجال

٢ - نوجد النقاط الحرجة للدالة

٣ - ندرس إشارة د' (س) على خط الأعداد و من ثم التعرف على فترات التزايد و التناقص

(١) : أوجد فترات التزايد و التناقص للدالة د (س) = س^٣ - ٣س^٢ + ١

الحل

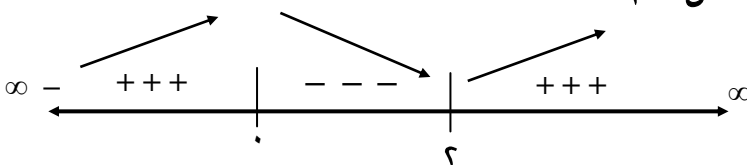
مجال الدالة = ح لأنها كثيرة حدود

د' (س) = ٣س^٢ - ٦س = ٣س(س - ٢)

د' (س) = ٠ عندما س = ٠ ، س = ٢

∴ د (س) تناقصية فى [٠ ، ٢]

، تزايدية فى]٢ ، ∞[



مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٢١) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

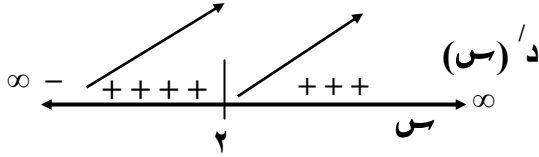
(٢) أوجد فترات التزايد و التناقص للدالة د (س) = س^٣ - ٦س^٢ + ١٢س - ٥

الحل

مجال الدالة = ح لأنها كثيرة حدود

$$د'(س) = ٣س^٢ - ١٢س + ١٢ = ٣(س - ٢)(س - ٢)$$

$$د'(س) = ٣(س - ٢)(س - ٢) \leq ٠ \text{ لكل } س \in \mathbb{R}$$



∴ د (س) تزايدية على ح

عندما س = ٢ ،

$$د(٢) = ٨ - ٢٤ + ٢٤ - ٥ = ٣ \text{ فتكون النقطة } (٢, ٣) \text{ تفصل بين فترتي تزايد الدالة}$$

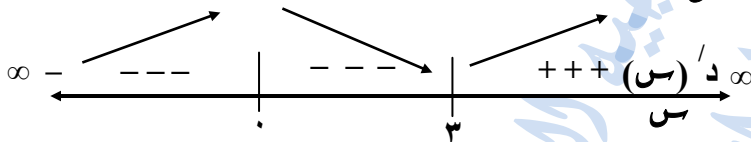
(٣) أوجد فترات التزايد و التناقص للدالة د (س) = س^٤ - ٤س^٣ + ٣

الحل

مجال الدالة = ح لأنها كثيرة حدود

$$د'(س) = ٤س^٣ - ١٢س^٢ = ٤س^٢(س - ٣)$$

$$د'(س) = ٤س^٢(س - ٣) = ٠ \text{ عندما } س = ٠, س = ٣$$



عندما س ∈ [٣, ∞) يكون :

$$د'(س) = ٤س^٢(س - ٣) > ٠ \text{ أى أن : } د'(س) > ٠$$

∴ د (س) تزايدية فى [٣, ∞)

عندما س ∈ [٠, ٣) يكون : د'(س) = ٤س^٢(س - ٣) < ٠ أى أن : د'(س) < ٠

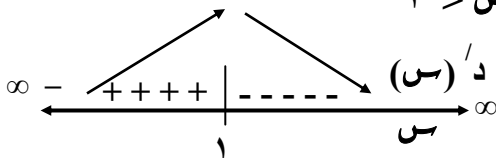
عندما س ∈ (-∞, ٠) يكون : د'(س) = ٤س^٢(س - ٣) < ٠ أى أن : د'(س) < ٠

∴ د (س) تناقصية فى (-∞, ٠) و [٠, ٣)

(٤) عين فترات التزايد و التناقص للدالة د (س) = |س - ١| - ٢

الحل

$$\left. \begin{array}{l} ١ \leq س , \\ ١ > س , \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٢ - ٣ = ١ + س - ٢ \\ ١ + س = ١ - س + ٢ \end{array} = د(س)$$



$$\left. \begin{array}{l} ١ \leq س , \\ ١ > س , \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١ - \\ ١ \end{array} = د(س)$$

عندما : د'(س) > ٠ عندما س < ١ أى أن : د'(س) > ٠ تناقصية فى [١, ∞)

عندما : د'(س) < ٠ عندما س > ١ أى أن : د'(س) < ٠ تزايدية فى (-∞, ١)

النقط الحرجة للدالة :

يقال أن s نقطة حرجة للدالة $d(s)$ إذا كانت تحقق أحد الشرطين :

$$1 - d'(s) = 0 \text{ لها وجود و تساوى الصفر}$$

$$2 - d'(s) \text{ غير موجودة}$$

$$(1) : \text{أوجد النقط الحرجة للدالة } d(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 - 1 \\ s^2 + 1 \end{array} \right\} \text{ ، } s < 1 \text{ ، } s \geq 1$$

الحل

$$0 = d'(s) = d'(1) = d'(-1) = 0$$

$$0 = d'(s) \text{ متصلة عند } s = 1$$

$$0 = d'(s) = d'(-1) = 0 \text{ عندما } s > 1$$

$$0 = d'(s) = d'(1) = 0 \text{ عندما } s < 1$$

$$0 = d'(s) = d'(-1) \neq d'(1) = 0 \text{ غير موجودة}$$

$$0 = d'(s) = 1 \text{ نقطة حرجة للدالة}$$

$$0 = d'(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 \\ \text{غير موجودة} \end{array} \right\} \text{ ، } s < 1 \text{ ، } s = 1 \text{ ، } s > 1$$

$$0 = d'(s) = 0 \text{ عندما } s = 1 \text{ أى عندما } s = 0$$

$$0 = d'(s) \text{ نقطة حرجة للدالة أيضاً}$$

$$0 = d'(s) \text{ النقط الحرجة للدالة هي : } s = 1 \text{ ، } s = 0$$

$$(2) : \text{أوجد النقط الحرجة للدالة } d(s) = \sqrt[3]{s^3 - 8}$$

الحل

$$0 = d'(s) = \frac{1}{3} (s^3 - 8)^{-\frac{2}{3}}$$

$$0 = d'(s) = \frac{1}{3} (s^3 - 8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} (s^3 - 8)^{-\frac{2}{3}} \times 3s^2 = \frac{s^2}{(s^3 - 8)^{\frac{2}{3}}}$$

$$0 = d'(s) = 0 \text{ عندما } s = 0 \text{ أى عندما } s = 0$$

$$0 = d'(s) \text{ نقطة حرجة للدالة}$$

$$0 = d'(s) \text{ غير معرفة عند } s = 2$$

$$0 = d'(s) \text{ النقط الحرجة للدالة هي : } s = 0 \text{ ، } s = 2$$

القيم العظمى المحلية (ع م) و الصغرى المحلية (ص م) لدالة :

إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [ب ، ب] وكانت د (س) تأخذ قيمة عظمى أو صغرى عند $د \in [ب ، ب]$ وكانت د (د) موجودة فإن : د (د) = صفر

إستخدام المشتقات لبحث القيم العظمى المحلية (ع م) و الصغرى المحلية (ص م) :

الخطوات :

- نوجد المشتقة الأولى د' (س)
- نوجد النقط الحرجة للدالة د وهي النقط التي تجعل د' (س) = ٠ أو د' (س) غير موجودة
- { بعد إيجادها يجب التأكد أنها \in لمجال الدالة }
- نعين نوع النقطة الحرجة
- وبفرض أن (س ، د (س)) نقطة حرجة للدالة د ... توجد طريقتين لتعيين نوعها

(١) المشتقة الأولى :

١ - إذا كان : د' (س) \leq ٠ لقيم س على يسار س مباشرة

، د' (س) \geq ٠ لقيم س على يمين س مباشرة

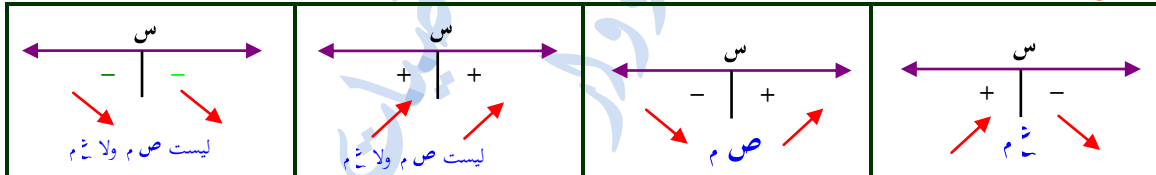
فإن : س نقطة عندها قيمة عظمى محلية (ع م)

٢ - إذا كان : د' (س) \geq ٠ لقيم س على يسار س مباشرة

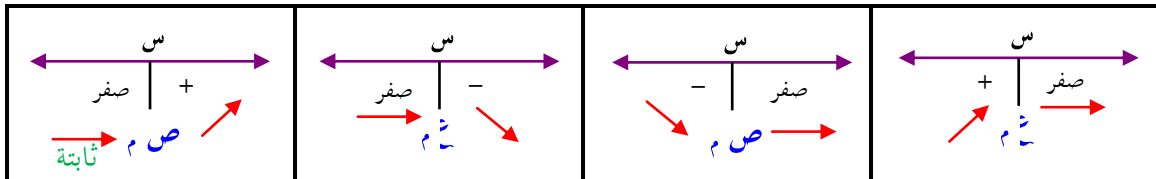
، د' (س) \leq ٠ لقيم س على يمين س مباشرة

فإن : س نقطة عندها قيمة صغرى محلية (ص م)

لاحظ ما يأتى :



حالات أخرى :



(٢) المشتقة الثانية :

إيجاد قيمة المشتقة الثانية عند س. " الإحداثي السيني للنقطة الحرجة " فإذا كانت :

* د'' (س) < ٠ (س ، د (س)) نقطة صغرى محلية (ص م)

* د'' (س) > ٠ (س ، د (س)) نقطة عظمى محلية (ع م)

* د'' (س) = ٠ أو $\pm \infty$... نرجع للمشتقة الأولى

(١) : أوجد نقط القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية للدالة د (س) = س^٤ - ١٨ س^٢
الحل

$$\therefore د (س) = س^4 - 18س^2$$

$$\therefore د' (س) = 4س^3 - 36س = 4س(س^2 - 9) = 4س(س - 3)(س + 3)$$

$$\therefore د'' (س) = 12س - 36$$

$$د' (س) = 0 \text{ عندما } س = 0, \text{ س} = 3, \text{ س} = -3$$

$$\therefore د'' (0) = -36 < 0 \text{ نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية}$$

$$\therefore د'' (3) = 108 - 36 = 72 > 0 \text{ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية}$$

$$\therefore د'' (-3) = 108 - 36 = 72 > 0 \text{ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية}$$

(٢) : أوجد نقط القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية للدالة د (س) = س^٢ - ٢س^٢ ، س < ٠ ،
س^٢ + ٢س^٢ ، س ≥ ٠
الحل

$$\therefore د (س) \text{ متصلة عند } س = 0, \text{ د} (س) = 0$$

$$\therefore د' (س) = 2س + 2س = 4س > 0, \text{ د} (س) = 2س - 2س = 0, \text{ س} < 0$$

$$\therefore د' (0) = 0, \text{ س} > 0, \text{ د} (0) = 0, \text{ س} < 0, \text{ د} (0) = 0$$

$$\therefore د' (س) = 2س + 2س = 4س = 0 \text{ عندما } س = 0$$

$$\text{عندما } س = 1, \text{ د} (1) = 1 - 2 = -1 < 0 \therefore س = 1 \text{ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية}$$

$$\text{عندما } س = 1, \text{ د} (1) = 1 - 2 = -1 < 0 \therefore س = 1 \text{ نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية}$$

(٣) : أوجد نقط القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية للدالة د (س) = س^٣ - ٤س^٢
الحل

$$\therefore د (س) = س^3 - 4س^2$$

$$\therefore د' (س) = 3س^2 - 8س = س(3س - 8) = س(3س - 8)$$

$$\therefore د'' (س) = 6س - 8$$

$$\therefore د' (س) = 0 \text{ عندما } س = 0, \text{ س} = 8/3$$

$$\text{عندما } س = 1, \text{ د} (1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$\therefore س = 1 \text{ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية}$$

$$\text{عندما } س = 0, \text{ د} (0) = 0$$

$$\therefore \text{لا يصلح هذا الإختبار و نبحث إشارة د' (س) على يسار و يمين س} = 0$$

$$\text{عندما } س > 0, \text{ د' (س) } > 0 \text{ تناقصية}$$

$$\text{عندما } س < 0, \text{ د' (س) } < 0 \text{ تزايدية}$$

$$\therefore س = 0 \text{ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية}$$

القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة :

إذا كانت الدالة d (س) معرفة على $[a, b]$ فإن :

- * القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
- * القيمة الصغرى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة

الخطوات :

- نوجد المشتقة الأولى
- نعين النقط التى عندها المشتقة الأولى = صفر و تنتمى للفترة المعطاه
- نعين النقط التى عندها المشتقة غير موجودة و تنتمى للفترة المعطاه
- نوجد قيم الدالة عند النقط التى حصلنا عليها جميعاً فى الخطوتين السابقتين و كذا قيم الدالة عند طرفى الفترة المعطاه
- نوجد أكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه و نوجد أصغر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه

(١) أوجد القيمة العظمى المطلقة و الصغرى المطلقة للدالة :

$$d(s) = s^3 - 2s^2 + 1 \quad \text{فى} \quad [-3, 2]$$

الحل

$$d'(s) = 3s^2 - 4s = s(3s - 4)$$

$$d'(s) = 0 \Rightarrow s = 0 \text{ أو } s = \frac{4}{3}$$

$$d'(s) = 0 \Rightarrow s = 0 \text{ أو } s = \frac{4}{3}$$

و جميعها تنتمى للفترة المعطاه

$$d(0) = 1, \quad d\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{27}, \quad d(-3) = -27, \quad d(2) = -1$$

∴ القيمة العظمى المطلقة = 1 و تبلغها الدالة عند $s = 0$

، القيمة الصغرى المطلقة = -27 و تبلغها الدالة عند $s = -3$ أو $s = 2$

(٢) أوجد القيمة العظمى المطلقة و الصغرى المطلقة للدالة : $d(s) = |s - 1| - 3$ فى $[-3, 0]$

الحل

$$d(s) = \begin{cases} s - 4 & \text{س} \leq 1 \\ s + 2 & \text{س} > 1 \end{cases}$$

$$d'(s) = \begin{cases} 1 & \text{س} < 1 \\ 1 & \text{س} > 1 \end{cases}$$

∴ $d'(s) = 1$ عند $s = 1$ و $d'(s) = 1$ عند $s = -3$ أو $s = 0$

$$d(s) = \begin{cases} s - 4 & \text{س} < 1 \\ s + 2 & \text{س} > 1 \end{cases}$$

$$d(s) = \begin{cases} s - 4 & \text{س} < 1 \\ s + 2 & \text{س} > 1 \end{cases}$$

$$d(-3) = -7, \quad d(0) = -2, \quad d(1) = -3$$

∴ القيمة العظمى المطلقة = -2 و تبلغها الدالة عند $s = 0$

، القيمة الصغرى المطلقة = -7 و تبلغها الدالة عند $s = -3$

تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى المطلقة :

هى مشكلات حياتية تصاغ فى قالب رياضى يكون الهدف منها الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما مثل الحصول على أكبر ربح أو أكبر مساحة أو أقل تكلفة أو أقل حجم ٠٠٠٠ الخ

الخطوات :

(١) نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة له كدالة فى متغير واحد آخر " المستقل " وذلك بالاستعانة بمعطيات المسألة

(٢) نحدد مجال المتغير المستقل فيكون هو الفترة المراد إيجاد القيمة العظمى المطلقة أة الصغرى المطلقة فيها

(٣) نوجد النقط الحرجة للدالة و التى تنتمى للفترة السابقة

(٤) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة السابقة و عند طرفى الفترة لمعرفة القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة

ملاحظات :

- كل قيمة عظمى أو صغرى مطلقة تكون قيمة عظمى أو صغرى محلية ولكن العكس غير صحيح
- القيمة العظمى أو الصغرى المطلقة تكون وحيدة ، لكن يمكن أن يكون للدالة أكثر من قيمة عظمى أو صغرى محلية
- دائماً القيمة العظمى المطلقة \leq القيمة الصغرى المطلقة
- لكن ليس من الضروري أن تكون : القيمة العظمى المحلية $<$ القيمة الصغرى المحلية

(١) مستطيل محيطه ٣٠ سم أوجد بعديه حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل

نفرض أن أحد بعدي المستطيل = س سم ، والآخر = ص سم \therefore ص = (١٥ - س)
مساحة المستطيل (م) = س \times ص = س (١٥ - س) = ١٥ س - س^٢
 \therefore م' = ١٥ - ٢ س ، م'' = ٢ - ٠ > ٠ سالبة
م' = ٠ ، عندما س = ٧.٥
 \therefore مساحة المستطيل أكبر ما يمكن س = ٧.٥ سم
 \therefore بعدي المستطيل يكون ٧.٥ سم ، ٧.٥ سم

(٢) وجد أحد المصانع أنه يكسب ٢٠ جنيهاً فى كل وحدة منتجة إذا كان إنتاجه الأسبوعى ٨٠٠ وحدة

فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن الربح يقل قرشين عن كل وحدة أوجد عدد الوحدات التى ينتجها المصنع فى الأسبوع ليحقق أكبر ربح ممكن

الحل

نفرض أن عدد الوحدات الزائدة = س وحدة ، الربح = ص جنيهاً
 \therefore ص = (٨٠٠ + س) (٢٠ - ٠.٠٢ س) = ١٦٠٠٠ + ٤ س - ٠.٠٢ س^٢
 \therefore ص' = ٤ - ٠.٠٤ س ، ص'' = ٠.٠٤ - ٠
ص' = ٠ ، عندما س = ١٠٠
 \therefore الربح يكون أكبر ما يمكن عندما س = ١٠٠
 \therefore عدد الوحدات الذى يحقق أكبر ربح ممكن = ٨٠٠ + ١٠٠ = ٩٠٠ وحدة

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٢٧) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

(٣) : متوازي مستطيلات حجمه ١٨٠٠ سم^٣ والنسبة بين طولى ضلعى قاعدته ٢ : ٣ أوجد إبعاد المتوازي لكي تكون مساحته اقل ما يمكن

الحل

∴ النسبة بين طولى ضلعى قاعدة متوازي المستطيلات = ٢ : ٣

∴ نفرض أن أبعاد متوازي المستطيلات هي : ٢ س ، ٣ س ، ع ، حجمه = ح ، مساحته = م

$$∴ ١٨٠٠ = ح ∴ ١٨٠٠ = ٢ س × ٣ س × ع ∴$$

$$∴ ع = \frac{٣٠٠}{س}$$

$$∴ م = (٢ س × ٣ س × ع + ٣ س × ع × ٢ س + ٢ س × ع × ٣ س) = (٢ س × ٣ س × ع + ٢ س × ٣ س × ع + ٢ س × ٣ س × ع)$$

بالتعويض عن : ع

$$∴ م = ١٢ س' + ١٠ س × \frac{٣٠٠}{س} = ١٢ س' + \frac{٣٠٠٠}{س}$$

$$م' = ٢٤ س - \frac{٣٠٠٠}{س}$$

$$م'' = ٢٤ + \frac{٦٠٠٠}{س}$$

$$م' = ٠ \quad \text{عندما} \quad ٢٤ س - \frac{٣٠٠٠}{س} = ٠ \quad \text{أي عندما} \quad س = ٥$$

$$∴ م'' < ٠ \quad \text{عندما} \quad س = ٥$$

∴ س = ٥ تجعل المساحة أقل ما يمكن

∴ الأبعاد هي : ١٠ سم ، ١٥ سم ، ١٢ سم

(٤) قطاع من دائرة محيطه ثابت الطول . أثبت أن مساحة سطحه تكون أكبر ما يمكن عندما تكون زاويته المركزية يساوى ٢ زاوية نصف قطرية .

الحل

نفرض أن طول نصف قطر الدائرة = ر سم ، قياس زاوية القطاع = هـ ، طول القوس = ل

∴ محيط القطاع مقدار ثابت (ر) = ٢ ر = ل + ر = ٢ ر + ر = ٣ ر

$$∴ ر = \frac{ل}{٢} \quad \text{مساحة القطاع (م) = } \frac{١}{٢} هـ = \frac{١}{٢} هـ \times \left(\frac{ل}{٢} \right) \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} هـ \times \frac{ل}{٢}$$

$$م = \frac{١}{٢} هـ \times \frac{ل}{٢} = \frac{١}{٢} هـ \times \frac{٢ ر}{٢} = \frac{١}{٢} هـ \times ر$$

$$\frac{١}{٢} هـ \times ر = \frac{١}{٢} هـ \times \frac{٢ ر}{٢} = \frac{١}{٢} هـ \times ر = \frac{١}{٢} هـ \times ر$$

$$\text{بوضع } \frac{ك}{هـ} = \text{صفر} \quad ∴ هـ = ٢$$

$$∴ \text{بفرض } هـ > ٢ \quad \frac{ك}{هـ} < ٠ \quad \text{موجة} \quad ∴ \text{تزايدية}$$

$$\text{بفرض } هـ < ٢ \quad \frac{ك}{هـ} < ٠ \quad \text{سالبة} \quad ∴ \text{تزايدية} \quad ∴ هـ = ٢ \quad \text{نهاية عظمى}$$

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٢٨) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

(٥) سلك طوله ٦٨ سم قسم إلى جزئين ثنى الأول على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه ، و ثنى الثانى على شكل مربع أوجد عرض المستطيل بحيث يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن

الحل

نفرض أن عرض المستطيل = س سم \therefore طوله = ٢ س سم

\therefore محيط المستطيل = ٢ (س + ٢ س) = ٦ س

\therefore محيط المربع = ٦٨ - ٦ س

\therefore طول ضلع المربع = $\frac{٦٨ - ٦ س}{٤} = ١٧ - \frac{٣}{٢} س$ سم

\therefore مجموع مساحتي الشكلين (م) = س ٢ \times س ٢ + (١٧ - $\frac{٣}{٢} س$) (١٧ - $\frac{٣}{٢} س$)

\therefore م = س ٢ + (١٧ - $\frac{٣}{٢} س$) (١٧ - $\frac{٣}{٢} س$)

\therefore م' = ٢ س - ١٧ + س = ٢ س - ١٧

٢ س - ١٧ = ٠ \Rightarrow س = ٨.٥

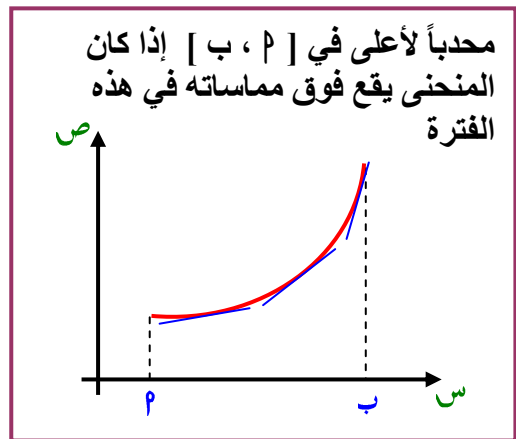
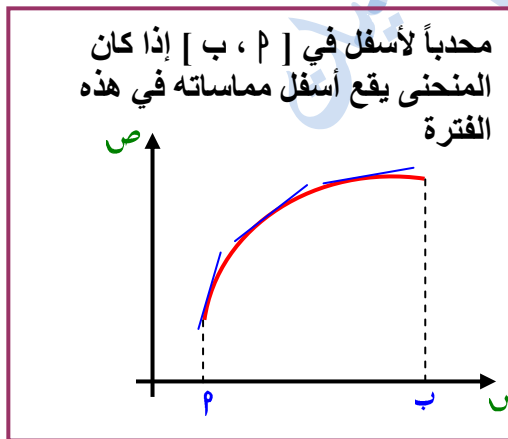
م'' = ٢ > ٠ \therefore م' = ٠ عندما س = ٨.٥

\therefore مجموع مساحتي الشكلين تكون أصغر ما يمكن عندما س = ٨.٥

التحذب و نقط الانقلاب :

تعريف :

إذا كانت الدالة د متصلة في [٢، ب] وقابلة للاشتقاق في [٢، ب] فإن منحنى الدالة د يكون :



نظرية :

- إذا كانت د'' (س) > ٠ في [٢، ب] فإن المنحنى يكون محدباً لأعلى في هذه الفترة
- إذا كانت د'' (س) < ٠ في [٢، ب] فإن المنحنى يكون محدباً لأسفل في هذه الفترة

لدراسة التحذب نبحث إشارة المشتقة الثانية

نقطة الانقلاب : هى النقطة التى تفصل بين مناطق التحذب إلى أسفل و مناطق التحذب لأعلى من منحنى

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٢٩) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

خطوات بحث تحذب منحنى الدالة د (س) " فابلية للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :

(١) نوجد د'' (س)

(٢) نوجد مجموعة حل د'' (س) ≥ 0 ، فنحصل على مناطق التحذب إلى أعلى

، نوجد مجموعة حل د'' (س) ≤ 0 ، فنحصل على مناطق التحذب إلى أسفل

وبفرض أن (س ، د (س)) نقطة حرجة للدالة بدراسة التفرع حول س. تظهر الحالات التالية :

--	--	--	--

خطوات تعيين نقط الانقلاب للدالة د (س) " فابلية للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :

• نوجد د' (س) ، د'' (س) ثم نحل المعادلة د'' (س) = 0

• نبحث إشارة د'' (س) قبل و بعد " مباشرة " كل نقطة من النقط السابقة بحيث تنتمى هذه النقط لمجال الدالة فيكون :

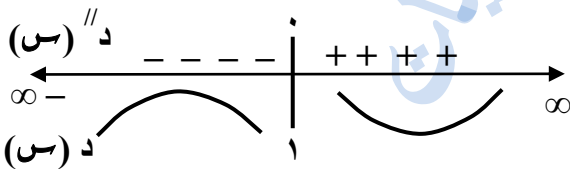
(١) د'' (س) تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فتكون هذه النقطة نقطة انقلاب

(٢) د'' (س) لا تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فلا تكون هذه النقطة نقطة انقلاب

(١) أوجد مناطق التحذب إلى أعلى و مناطق التحذب إلى أسفل و نقط الانقلاب " إن وجدت "

للدالة : د (س) = س^٣ - ٣س^٢

الحل



$$\therefore د (س) = س^3 - ٣س^2$$

$$\therefore د' (س) = ٣س^2 - ٦س$$

$$، د'' (س) = ٦س - ٦ = ٦(س - ١)$$

$$، د'' (س) = 0 \text{ عندما } س = ١$$

عندما $س > ١$ تكون د'' (س) > 0

∴ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أعلى عندما $س > ١$ أى فى المنطقة $[-\infty, ١]$

عندما $س < ١$ تكون د'' (س) < 0

∴ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أسفل عندما $س < ١$ أى فى المنطقة $[١, \infty]$

∴ المنحنى يتغير تحديه قبل و بعد $س = ١$

∴ عند $س = ١$ توجد نقطة انقلاب

$$، \therefore د (١) = ١ - ٣ = -٢ \quad \therefore (١, -٢) \text{ نقطة انقلاب}$$

(٢) أوجد مناطق التحذب إلى أعلى و مناطق التحذب إلى أسفل و نقط الإنقلاب " إن وجدت "

للدالة : د (س) = س^٤ - ٢٤س^٣ + ٤

الحل

∴ د (س) = س^٤ - ٢٤س^٣ + ٤

∴ د' (س) = ٤س^٣ - ٧٢س^٢

، د'' (س) = ١٢س^٢ - ١٤٤س

١٢(س - ٤)(س + ٤) =

١٢(س - ٢)(س + ٢) =

، د'' (س) = ٠ عندما س = ٢ ، س = -٢ ،

عندما س > ٢ ، د'' (س) > ٠ ، فإن : د'' (س) > ٠

∴ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أسفل فى [-∞ ، ٢ -)

، عندما -٢ < س < ٢ ، فإن : د'' (س) < ٠ ،

∴ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أعلى فى [٢ ، ∞)

، عندما س < -٢ ، فإن : د'' (س) < ٠ ،

∴ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أسفل فى [-∞ ، -٢)

(٣) أوجد مناطق التحذب إلى أعلى و مناطق التحذب إلى أسفل و نقط الإنقلاب " إن وجدت "

للدالة : د (س) = (١ - س)^٤

الحل

∴ د (س) = (١ - س)^٤

∴ د' (س) = ٤(١ - س)^٣ ، د'' (س) = ١٢(١ - س)^٢

∴ د'' (س) = ١٢(١ - س)^٢ ≥ ٠ ، لكل قيم س ∈ ح

∴ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أسفل فى ح

، د'' (س) = ٠ عندما س = ١

المنحنى ليس له نقطة إنقلاب عندما س = ١ لأنه لا يغير تحدبه

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٣١) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

(٤) عين قيم p ، b ، c ، e بحيث يكون للمنحنى : $v = p s^3 + b s^2 + c s + e$
 مماس أفقى عند $(2, 0)$ ، نقطة إنقلاب عند $(0, 1)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore (2, 0) \text{ تقع على المنحنى} & \therefore v = 0 \text{ عندما } s = 2 \therefore 0 = 8p + 4b + 2c + e \\ \therefore (0, 1) \text{ تقع على المنحنى} & \therefore v = 1 \text{ عندما } s = 0 \therefore 1 = e \\ \therefore e = 1 & \therefore 0 = 8p + 4b + 2c + 1 \\ \therefore 8p + 4b + 2c & = -1 \quad (1) \\ \therefore v = p s^3 + b s^2 + c s + 1 & \therefore v' = 3ps^2 + 2bs + c \\ \therefore v' = 0 \text{ عند } (2, 0) & \therefore 0 = 12p + 4b + c \\ \therefore v' = 0 \text{ عند } (0, 1) & \therefore 0 = 0 + 2b + c \\ \therefore 2b + c & = 0 \quad (2) \\ \text{أي أن : } b = -\frac{c}{2} & \text{ وبالتعويض فى (1) ينتج : } 8p - c - 1 = 0 \\ \therefore 8p - c & = 1 \quad (3) \\ \text{منها ينتج : } c = 8p - 1 & \text{ وبالتعويض فى (2) ينتج : } 2b = 1 - 8p \\ \therefore b = \frac{1 - 8p}{2} & \end{aligned}$$

رسم منحنيات الدوال :

لرسم منحنى الدالة $d(s)$ " كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل " نتبع الخطوات الآتية :

١ - نوجد $d'(s)$ ، $d''(s)$

٢ - نستخدم $d'(s)$ فى تعيين :

p - مناطق التزايد حيث $d'(s) > 0$ ، مناطق التناقص حيث $d'(s) < 0$

b - نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية " إن وجدت " حيث $d'(s) = 0$

٣ - نستخدم $d''(s)$ فى تعيين :

p - مناطق التحذب إلى أعلى حيث $d''(s) > 0$ ، مناطق التحذب إلى أسفل حيث $d''(s) < 0$

b - نقط الإنقلاب " إن وجدت " حيث $d''(s) = 0$

٤ - نعين بعض النقط المساعدة على الرسم مثل :

p - نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بحل المعادلة $d(s) = 0$ " إن أمكن "

و نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع $s = 0$ أى $(0, d(0))$

b - بعض النقط الأخرى بالتعويض عن s بأى قيمة و إيجاد $d(s)$

٥ - ترتيب النقط السابقة فى جدول و تمثيلها بيانياً و توصيلها

مراجعة التفاضل والتكامل / الصف الثالث الثانوى (٣٢) منتدى توجيه الرياضيات / عادل ادوار

مثال أرسم شكلاً عاماً لمنحنى الدال : د (س) = س (س - ٣) :
الحل

$$د (س) = س (س - ٣) = س^٢ - ٣س = س^٢ - ٣س + ٩ - ٩$$

$$د' (س) = ٢س - ٣ = ٩ + س - ١٢ = ٣ (س - ١) (س - ٣)$$

$$د'' (س) = ٢ = ١٢ - ١٠ = ٢ (س - ٦)$$

* التزايد و التناقص و نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

$$د' (س) = ٠ \text{ عندما } س = ١, س = ٣$$

$$د' (س) > ٠ \text{ عندما } ١ < س < ٣$$

∴ د تناقصية فى [١, ٣]

$$د' (س) < ٠ \text{ عندما } س < ١, س > ٣$$

∴ د تزايدية فى كل من [٣, ∞) و (-∞, ١]

$$∴ د' (١) = ٠ > ٠ \text{ ∴ } (١, ٠) \text{ نقطة انقلاب ص } \downarrow$$

$$∴ د' (٣) = ٠ < ٠ \text{ ∴ } (٣, ٠) \text{ نقطة انقلاب ص } \uparrow$$

* التحذب و نقط الانقلاب :

$$∴ د' (س) = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$

$$د'' (س) > ٠ \text{ عندما } س > ٢$$

∴ المنحنى محدب إلى أعلى فى [٢, ∞)

$$د'' (س) < ٠ \text{ عندما } س < ٢$$

∴ المنحنى محدب إلى أسفل فى (-∞, ٢]

∴ المنحنى يتغير تحذبه قبل و بعد س = ٢

∴ نقطة انقلاب (٢, ٢)

* نقط أخرى :

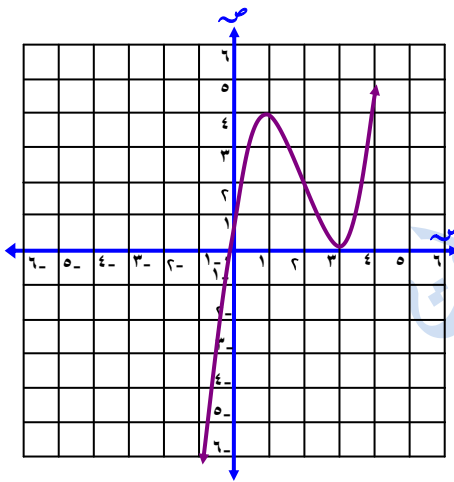
$$د (س) = ٠ \text{ عندما } س (س - ٣) = ٠$$

$$\text{أى عندما : } س = ٠, س = ٣$$

∴ (٠, ٠) , (٣, ٠) نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

$$∴ د (١) = ٩ - ٣ = ٦, د (٤) = ٤ - ١٢ = -٨$$

∴ (-٨, ١) , (٦, ٤) تقع على المنحنى



س	٤	٣	٢	١	٠	- ١
ص	٤	٠	٢	٤	٠	- ١٦

التكامل

تعريف :

إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في مجالها بحيث : $t'(s) = d(s)$ فإن :
ت (س) تسمى المشتقة العكسية للدالة د (س) أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة د (س)
و يرمز للدالة ت (س) بالرمز $\int d(s) ds$

أى أن : $t(s) = \int d(s) ds$ إذا وفقط إذا كان : $t'(s) = d(s)$

فمثلاً :

إذا كانت : $d(s) = s^2$ فإن : $d'(s) = 2s$
وبالتالى تكون الدالة s^2 هى مشتقة عكسية " دالة أصلية مقابلة " للدالة $2s$
أى أن : $\int 2s ds = s^2 + C$ حيث : ث ثابت التكامل

نظرية :

$$\int s^n ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{حيث : } n \neq -1, \quad C \text{ ثابت}$$

البرهان :

ينتج مباشرة بإيجاد المشتقة الأولى للطرف الأيسر

نتيجة :

$$\int s^m ds = \frac{s^{m+1}}{m+1} + C \quad \text{حيث : } m \neq -1, \quad C \text{ ثابت}$$

ملاحظة :

$$\int s ds = \frac{s^2}{2} + C, \quad \int s^m ds = \frac{s^{m+1}}{m+1} + C$$

قاعدة :

$$\int [d(s) \pm d_1(s) \pm \dots \pm d_n(s)] ds = \int d(s) ds \pm \int d_1(s) ds \pm \dots \pm \int d_n(s) ds$$

$$= \int d(s) ds \pm \int d_1(s) ds \pm \dots \pm \int d_n(s) ds$$

أمثلة :

$$(1) \int (s^5 + s^4 - s^3) ds = \frac{s^6}{6} + \frac{s^5}{5} - \frac{s^4}{4} + C$$

$$(2) \int \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) ds = \int s^{-3} ds + \int s^{-2} ds = -\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s} + C$$

$$= -\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s} + C$$

$$(3) \int (s^5 - s^4 + s^3) ds = \frac{s^6}{6} - \frac{s^5}{5} + \frac{s^4}{4} + C$$

$$= \frac{s^6}{6} - \frac{s^5}{5} + \frac{s^4}{4} + C$$

$$(4) \left[\frac{s^3 - 4s^2 + 5s}{s} = (s^2 - 4s + 5) \right] \text{ ع س}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s^3} + \text{ث}$$

$$(5) \left[\frac{(1-s)(1+s+s^2)}{1-s} = \frac{1-s^3}{1-s} \right] \text{ ع س}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \text{ث} = (1+s+s^2) \text{ ع س}$$

نظرية:

إذا كان: p, b ثابتين، $r \neq 1$ فإن:

$$\text{حيث ث ثابت} \quad \left[\frac{(b+sp)^{r+1}}{(1+r)p} = \text{ع س} \right] + \text{ث}$$

البرهان:

ينتج مباشرة بإيجاد المشتقة الأولى للطرف الأيسر

أمثلة:

$$(1) \left[(2s+5)^3 \text{ ع س} \right] = \frac{(2s+5)^4}{4 \times 3} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{4} (2s+5)^4 + \text{ث}$$

$$(2) \left[\frac{(5-s^2)}{2 \times 3} \text{ ع س} \right] = \frac{(5-s^2)^3}{3 \times 2} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{3} (5-s^2)^3 + \text{ث}$$

$$(3) \left[s^7 \left(\frac{1}{s^6} + \frac{7}{s^5} \right) \text{ ع س} \right] = \left[\left(\frac{1}{s} + \frac{7}{s^2} \right) s^7 \right] \text{ ع س}$$

$$= (1+s^7) \text{ ع س} = \frac{1}{6} (1+s^7)^6 + \text{ث}$$

$$(4) \left[(1+s)^3 \text{ ع س} \right] = \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث}$$

$$\text{بالضرب فى } 3 \times 1 \quad \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث} = \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث}$$

$$\text{بإضافة } \pm 0 \quad \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث} = \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث} - \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث} = \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث}$$

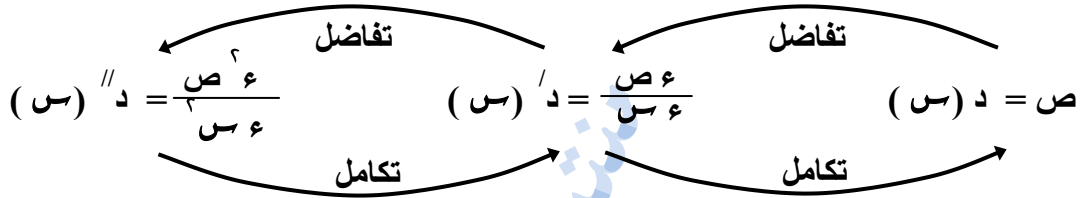
$$= \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث} - \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث} = \frac{1}{3} (1+s)^3 + \text{ث}$$

ملاحظة :

نعلم أن مشتقة v بالنسبة إلى s هي $\frac{v}{s}$

∴ تكامل $\frac{v}{s}$ بالنسبة إلى s هو v

أى أن : $\left[\frac{v}{s} \right] = v$



فصل المتغيرات :

إذا كان : $\frac{v}{s} = \frac{d(s)}{ds}$ فإن :

$$\left[ds \cdot \frac{v}{s} \right] = v$$

(١) إذا كان $\frac{v}{s} = \frac{2s+5}{3s-4}$ وكانت $v = 2$ عندما $s = -1$ أوجد العلاقة بين s ، v

الحل

$$\left[ds \cdot \frac{2s+5}{3s-4} \right] = v$$

$$\therefore 3s - 4v = 2s + 5 \quad \text{ث}$$

$$\therefore v = 2 \text{ عندما } s = -1$$

$$\therefore 3(-1) - 4v = 2(-1) + 5 \quad \text{ث ومنها } v = 2$$

هى العلاقة بين s ، v

$$\therefore 3s - 4v = 2s + 5 \quad \text{ث}$$

(٢) أوجد الدالة التى مشتقتها الأولى $s' - 2s - 3 = 0$ علماً بأن الدالة $= 8$ عندما $s = 3$

الحل

$$d(s) = (s' - 2s - 3) ds$$

$$= \frac{s^2}{2} - s^2 - 3s + \text{ث}$$

$$\therefore d(s) = 8 \text{ عندما } s = 3$$

$$8 = \frac{3^2}{2} - 3^2 - 3(3) + \text{ث} \quad \therefore \text{ث} = \frac{17}{2}$$

$$\therefore d(s) = \frac{s^2}{2} - s^2 - 3s + \frac{17}{2}$$

تكامل بعض الدوال المثلثية

$$* \quad [\text{حاس} \text{ ع} \text{ س} = - \text{حتا} \text{ س} + \text{ث}]$$

$$* \quad [\text{حتا} \text{ س} \text{ ع} \text{ س} = \text{حاس} \text{ س} + \text{ث}]$$

$$* \quad [\text{قأ} \text{ س} \text{ ع} \text{ س} = \text{طا} \text{ س} + \text{ث}]$$

$$* \quad [\text{حاس} (\text{ب} + \text{س}) \text{ ع} \text{ س} = - \frac{1}{\text{ب}} \text{حتا} (\text{ب} + \text{س}) + \text{ث}]$$

$$* \quad [\text{حتا} (\text{ب} + \text{س}) \text{ ع} \text{ س} = \frac{1}{\text{ب}} \text{حاس} (\text{ب} + \text{س}) + \text{ث}]$$

$$* \quad [\text{قأ} (\text{ب} + \text{س}) \text{ ع} \text{ س} = \frac{1}{\text{ب}} \text{طا} (\text{ب} + \text{س}) + \text{ث}]$$

حيث : ث ثابت

البرهان :

ينتج مباشرة بإيجاد المشتقة الأولى للطرف الأيسر

تذكر ما يأتى :

$$* \quad \text{حتا} \text{ س} + \text{حاس} \text{ س} = 1$$

$$* \quad 1 + \text{طا} \text{ س} = \text{قأ} \text{ س}$$

$$* \quad \text{حاس} \text{ س} = 2 \text{ حاس} \text{ حتا} \text{ س}$$

$$* \quad \text{حتا} \text{ س} = \text{حتا} \text{ س} - \text{حاس} \text{ س} = 1 - \text{حاس} \text{ س} = 1 - 2 \text{ حاس} \text{ حتا} \text{ س}$$

$$* \quad \frac{2 \text{ طا} \text{ س}}{\text{طا} \text{ س}} = 2$$

أمثلة :

$$(1) \quad [(3 \text{ حاس} + 5 \text{ قأ} \text{ س}) \text{ ع} \text{ س} = -3 \text{ حتا} \text{ س} + 5 \text{ طا} \text{ س} + \text{ث}]$$

$$(2) \quad [(5 \text{ حتا} \text{ س} - \frac{3}{4} \text{ حاس} \text{ س}) \text{ ع} \text{ س} = \frac{5}{3} \text{ حتا} \text{ س} + \frac{3}{4} \text{ حتا} \text{ س} + \text{ث}]$$

$$(3) \quad [\text{قأ} (\frac{1}{3} \text{ س} + 3) + \text{حتا} (3 - \text{س})] \text{ ع} \text{ س}$$

$$= 2 \text{ قأ} (\frac{1}{3} \text{ س} + 3) + \text{حتا} (3 - \text{س}) + \text{ث}$$

$$(4) \quad [\text{حاس} \text{ حتا} \text{ س} \text{ ع} \text{ س} = \frac{1}{2}] \quad [\text{حاس} \text{ حتا} \text{ س} \text{ ع} \text{ س} = \frac{1}{2}] \quad [\text{حاس} \text{ حتا} \text{ س} \text{ ع} \text{ س} = \frac{1}{2}]$$

$$= - \frac{1}{2} \text{ حتا} \text{ س} + \text{ث}$$

$$(5) \quad [\text{حتا} \text{ س} + \text{حاس} \text{ س}] \text{ ع} \text{ س} = [\frac{1}{2} \text{ حتا} \text{ س} + \text{س} + \text{حاس} \text{ س}] \text{ ع} \text{ س}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ حاس} \text{ س} + \text{س} - \text{حتا} \text{ س} + \text{ث}$$

(٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة $v = d(s)$ عند أى نقطة عليه (s, v) يعطى من

العلاقة : $\frac{v}{s} = \frac{s-2}{s-1}$ أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بنقطة الأصل

الحل

$$\therefore \frac{v}{s} = \frac{s-2}{s-1}$$

$$\therefore [v(1-s) = s(s-2)]$$

$$\therefore \frac{1}{s}v - v = s - 2s^2$$

\therefore المنحنى يمر بنقطة الأصل $(0, 0)$

\therefore ث = ٠

$$\therefore \frac{1}{s}v - v = s - 2s^2$$

أى أن معادلة المنحنى هى : $\therefore s + v - 4s - v = 0$

(٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة $v = d(s)$ عند أى نقطة عليه (s, v) يساوى

(قأ س + ٢ حتا س) أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$

الحل

$$v = [(\text{قأ س} + 2 \text{ حتا س})] \quad \text{طاس} + \text{حاس} + \text{ث}$$

$$\therefore \text{المنحنى يمر } (\frac{1}{3}, 1) \quad \therefore 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + \text{ث}$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 1 + 1 + \text{ث} \quad \therefore \text{ث} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{معادلة المنحنى هى : } v = \text{طاس} + \text{حاس} - 3$$

(٥) وعاء سعته ١٤٠٠ سم^٣ كان فارغاً ثم صب فيه الماء تدريجياً بمعدل $(2\sqrt{h} + 50)$ سم^٣ / ث

حيث h الزمن أوجد الزمن اللازم لإمتلاء الوعاء

الحل

$$\frac{dv}{dh} = 2\sqrt{h} + 50$$

$$\therefore v = \frac{2}{3}h^{3/2} + 50h + \text{ث}$$

عندما كان فارغاً فإن : $v = 0$ ، $h = 0$ $\therefore \text{ث} = 0$

$$\therefore v = \frac{2}{3}h^{3/2} + 50h \quad \text{عندما يمتلئ } 1400 = v$$

$$\therefore 1400 = \frac{2}{3}h^{3/2} + 50h$$

$$\therefore 0 = 1400 - \frac{2}{3}h^{3/2} - 50h$$

$$\therefore 0 = (20 - h)(70 + h)$$

$$\therefore 20 = h$$

\therefore الزمن اللازم لإمتلاء الوعاء هو ٢٠ ث