

Chapitre 7

POUTRES FLECHIES DEVERSEMENT EN FLEXION SMPLE

1. INTRODUCTION

11. Constatation et mécanisme du déversement

Le déversement est une instabilité de forme susceptible d'affecter les poutres fléchies. Il se manifeste, pour une poutre en I par exemple, fléchie par rapport à l'axe de forte inertie, par des déformations latérales dont une déflexion excessive dans le plan perpendiculaire au plan de charge et un vrillage (torsion) autour de l'axe longitudinal de la poutre, qui ne sont pas compatibles avec la nature des charges appliquées à la poutre.

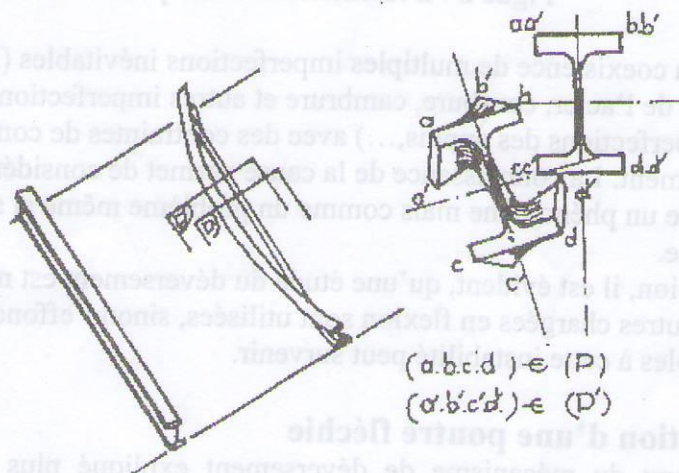


Figure 1 : Déversement d'une poutre en I

En effet, une poutre travaillant en flexion présente des sections transversales soumises à une contrainte normale linéaire non uniforme et donc, une partie de la poutre est tendue et l'autre comprimée. La partie tendue, considérée isolément est stable. Quant à la partie comprimée, considérée seule, elle peut être instable, et tend à flamber latéralement uniquement, c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire au plan de flexion en raison de l'appui continu que lui fournit la partie tendue dans l'autre direction. Les 2 parties de la poutre, ayant individuellement un comportement particulier mais par ailleurs, étant intimement liées, interagissent l'une sur l'autre et rendent ainsi le mécanisme du déversement très complexe. Physiquement, on peut dire que la partie tendue empêche le flambement de la partie comprimée dans le plan de flexion et s'oppose plus ou moins à son flambement dans le plan perpendiculaire. Simultanément, la partie comprimée entraîne plus ou moins la partie tendue lors de la déformation induite par le flambement. L'interaction des 2 parties de la poutre fait naître des distorsions (rotations progressives des sections transversales) autour de l'axe longitudinal de la poutre.

En résumé, le déversement peut être caractérisé, par 2 déformations à la fois, dont l'une, est une déflexion latérale due à la tendance qu'ont les fibres de la partie comprimée à se

dérober (à flamber) sous la contrainte et l'autre, une distorsion des sections le long de l'axe longitudinal due aux effets d'interaction des parties de la poutre fléchie.

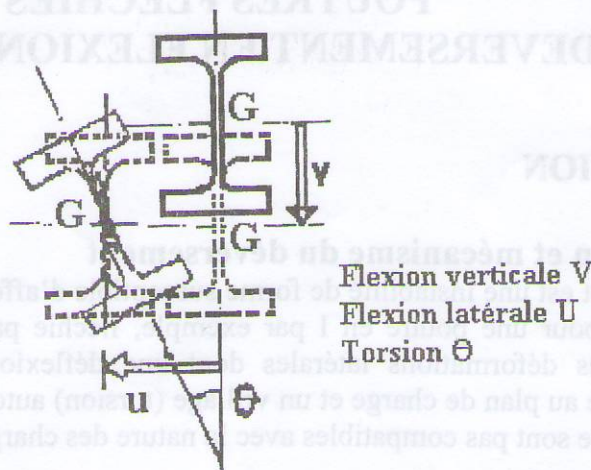


Figure 2 : Déformations d'une poutre déversée.

Causes : La coexistence de multiples imperfections inévitables (hétérogénéité et anisotropie de l'acier, courbure, cambrure et autres imperfections géométriques de la poutre, imperfections des appuis,...) avec des contraintes de compression est à la source du déversement. La connaissance de la cause permet de considérer le déversement non plus comme un phénomène mais comme un problème même si sa maîtrise est souvent très difficile.

En conclusion, il est évident, qu'une étude du déversement est nécessaire chaque fois que des poutres chargées en flexion sont utilisées, sinon l'effondrement de celles qui sont sensibles à cette instabilité peut survenir.

12 Stabilisation d'une poutre fléchie

Compte tenu du mécanisme de déversement expliqué plus haut, on déduit que la stabilité au déversement d'une poutre fléchie, dépend de la valeur de sa rigidité flexionnelle latérale et de la valeur de sa rigidité de torsion.

Une poutre fléchie sera donc d'autant plus sensible au déversement que :

- le rapport I_y / I_x entre les moments principaux d'inertie de la section est petit ;
- la valeur du moment d'inertie de torsion J de la section est faible ;
- la distance entre appuis empêchant la déformation, dans la direction perpendiculaire au plan de flexion, de la partie comprimée de la section est grande.

Ces connaissances sont importantes, elles permettent, lors de la conception d'une poutre fléchie, de guider le choix de l'ingénieur quant à la forme à adopter pour la section transversale de la poutre et de rechercher des points fixes pouvant servir d'appuis à la partie comprimée de la poutre.

II. PREVENTION DU DEVERSEMENT

21. Dispositions préventives

L'approche préventive du déversement au moyen de dispositions constructives (sans calculs fastidieux) doit être privilégiée par l'ingénieur.

Par exemple, le déversement d'une poutre fléchie peut être évité si des appuis latéraux suffisants au droit de la (ou les) partie(s) comprimée(s) ou encore des renforcements de la section conçus intelligemment, sont prévues lors de la conception de cette poutre. Toutefois, ces dispositions ne doivent pas grever le coût de la charpente.

Les appuis latéraux peuvent être continus (dans un plancher, fixation de la semelle supérieure (si elle est comprimée) sur la dalle en béton armé au moyen de connecteurs soudés sur la semelle et noyés dans le béton.) ou discontinus :

- 2 points fixes d'un contreventement,
- poutres transversales fixes retenant la semelle comprimée,
- raidisseurs transversaux et entretoises fixes,...

22. Justification de la capacité portante de la partie comprimée

Il n'y a pas d'instabilité de poutre fléchie, et donc aucune vérification par le calcul du déversement n'est nécessaire, s'il est justifié que la partie comprimée, supposée isolée du reste de la poutre, est capable de résister et rester stable (pas de flambement latéral) sous une contrainte de compression simple dont la valeur est égale à la valeur maximale de la contrainte pondérée σ_f de flexion simple. Par simplification, il suffit de vérifier que la semelle comprimée et séparée du corps de la poutre, satisfait la relation suivante

$$k \sigma \leq \sigma_c$$

Avec

$$\sigma = \sigma_f$$

σ_f : la valeur maximale de la contrainte de flexion

k : coefficient de flambement latéral de la semelle comprimée séparée.

III. THÉORIE LINÉAIRE DU DÉVERSEMENT ELASTIQUE (RAPPELS)

Ce paragraphe comporte quelques rappels de la théorie des instabilités, traitée ordinairement en cours de résistance des matériaux. Pour en connaître plus, il faut donc s'y reporter.

Pour l'étude du déversement, considérons un cas fondamental, à savoir la poutre simplement appuyée, sollicitée en flexion pure. En partant de l'état déformé de la poutre, on peut calculer la valeur de la charge critique pour laquelle le système est en équilibre. Ce cas fondamental de la poutre simple est résolu en considérant les hypothèses suivantes :

- matériau parfaitement homogène et isotrope et infiniment élastique,
- poutre parfaitement rectiligne, de section constante et doublement symétrique,
- appuis de type simple à la flexion et où la rotation ϕ de la section autour de l'axe longitudinal est empêchée,
- inertie I_y de la section faible vis à vis de l'inertie I_x ,
- petites déformations ($\sin \phi \cong \phi$, $\cos \phi \cong 1$).

On peut établir les équations différentielles relatives à cette poutre en écrivant les conditions d'équilibre à l'état déformé ce qui représente un système de trois équations à trois inconnues (w, u, ϕ) :

- Flexion suivant l'axe xx :

$$EI_x = \frac{d^2 w(z)}{dz^2} = -M_x(z) \quad (1)$$

- Flexion suivant l'axe yy :

$$EI_y = \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = -M_y(z) \quad (2)$$

- Torsion autour de l'axe longitudinal zz :

$$GJ \frac{d\varphi(z)}{dz} - EI_w \frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} = Mz(z) \quad (3)$$

Les déplacements $u(z)$ et $\varphi(z)$ entraînant l'apparition de composantes du moment M suivant les axes xx , yy et zz liés à la section :

- axe xx : $Mx(z) = M \cos\varphi \cong M$
- axe yy : $My(z) = M \sin\varphi \cong \varphi M$
- axe zz : $Mz(z) = M \sin(du/dz) \cong M du/dz$

Les équations (1), (2) et (3) deviennent alors :

$$EI_x \frac{d^2 w(z)}{dz^2} = -M \quad (4)$$

$$EI_y \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = -\varphi(z) \cdot M \quad (5)$$

$$GJ \frac{d\varphi(z)}{dz} - EI_w \frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} = M \frac{du(z)}{dz} \quad (6)$$

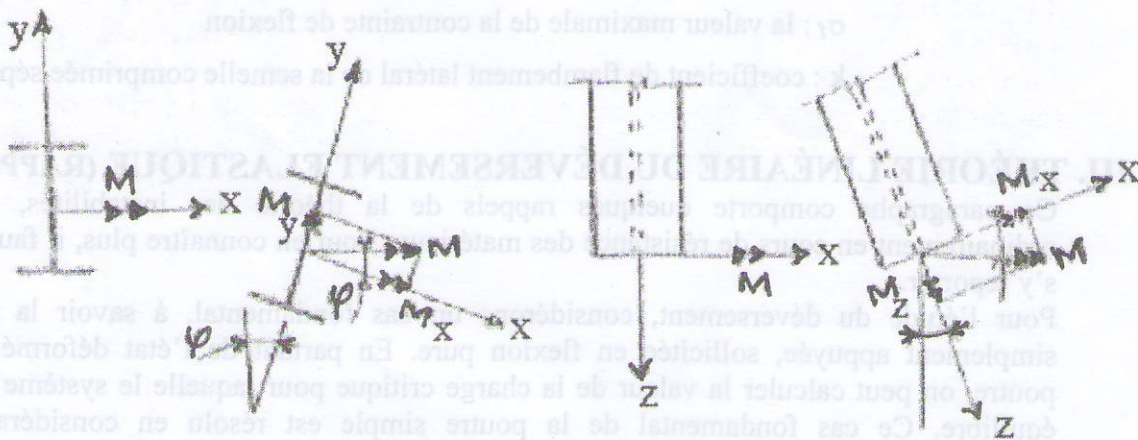


Figure 3: Composantes du moment M dans les axes liés à la barre.

La relation (4) est indépendante des deux suivantes : c'est l'équation d'une poutre sollicitée en flexion pure. En dérivant une fois l'équation (6) et en remplaçant $(d^2 u(z)/dz^2)$ par sa valeur tirée de (5), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$EI_w \frac{d^4\varphi(z)}{dz^4} - GJ \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} - \frac{M^2}{EI_y} \varphi(z) = 0$$

La résolution de cette équation, en prenant en compte les conditions aux limites, donne la valeur du moment critique de déversement M_{cr} pour que les déformations $u(z)$ et $\varphi(z)$ puissent prendre n'importe quelle amplitude non nulle. Cette valeur est :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi \cdot E}{L} \right)^2 I_w I_y}$$

Où :

L : distance entre deux appuis empêchant le déversement,

G : module de glissement,

J : moment d'inertie de torsion de la section,

E : module d'élasticité,

I_y : moment d'inertie par rapport à l'axe yy (axe de faible inertie),

I_w : moment d'inertie de gauchissement.

Le moment critique est pour le déversement l'équivalent de l'effort normal critique N_{cr} pour le flambement.

En pratique le cas particulier de la poutre simple en flexion pure ne se rencontre jamais. De plus, les appuis d'une poutre sont souvent des encastremements élastiques à la flexion et à la torsion, les charges extérieures ne se réduisent pas à un simple moment de flexion et la section de la poutre peut être dissymétrique.

Les cas réels présentent des conditions très différentes de celles admises dans les hypothèses du cas fondamental. Ces différences font que l'expression du moment critique de déversement s'en trouve modifiée.

Les conditions d'appuis quelconques induisent des conditions aux limites différentes de celles adoptées pour la résolution de l'équation différentielle du cas fondamental. De plus, le chargement de la poutre ainsi que son système statique modifie l'expression de l'expression de l'équation différentielle fondamentale. Enfin, pour une section dissymétrique, le centre de cisaillement de la section ne coïncide plus avec son centre de gravité, ce qui modifie les caractéristiques de gauchissement de cette section par rapport à une section bis symétrique.

La position du point d'application des charges extérieures, par rapport au centre de cisaillement de la section de la poutre, peut également influencer la valeur du moment critique de déversement élastique, suivant que les charges créent un moment secondaire stabilisant ou déstabilisant.

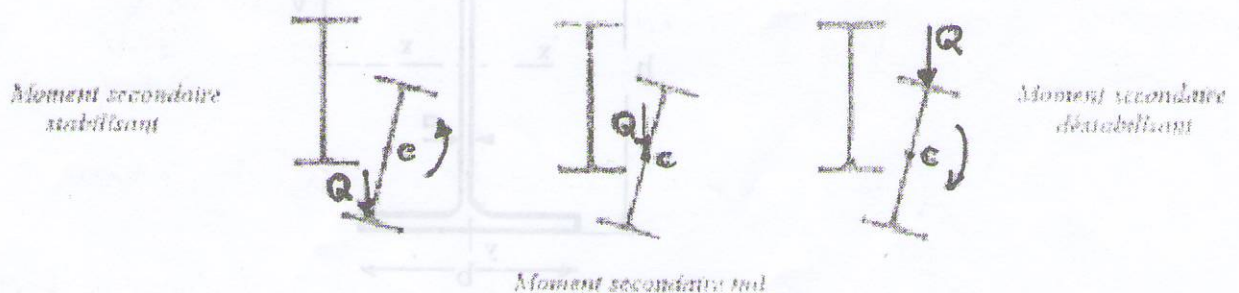


Figure 4: Influence de la position des charges.

Selon la position du point d'application des charges extérieures, on peut considérer les trois cas suivants :

- La charge engendre un moment secondaire stabilisant : l'hypothèse de calcul avec la charge introduite au centre de cisaillement est conservatrice.
- La charge agit au centre de cisaillement : l'hypothèse de calcul avec la charge introduite au centre de cisaillement est exacte.
- La charge engendre un moment secondaire déstabilisant : il est donc nécessaire d'en tenir compte lors de la détermination du moment critique de déversement élastique.

Le déversement a été étudié par plusieurs chercheurs émérites afin de trouver une méthode de calcul générale, applicable au nombreux cas pratiques. Les résultats de ces études théoriques, combinées à ceux d'études expérimentales du déversement, sont à

l'origine des méthodes pratiques de vérification de cette instabilité. Dans ce qui suit, une de ces méthodes sera présentée.

IV. VÉRIFICATION DE LA STABILITÉ AU DÉVERSEMENT

Les études expérimentales du déversement ont montré que le moment réel de déversement M_d est, parfois, inférieur au moment critique de déversement M_{cr} à cause des plastifications qui se produisent. Les « imperfections » de la poutre (contraintes résiduelles, défauts de rectitude, ...) contribuent à la formation de ces plastifications.

Parmi les méthodes pratiques de vérification, celle préconisée par les règles CM66 et qui constitue une extension des travaux de M. Dutheil relatifs aux barres comprimées, sera traitée dans ce qui suit :

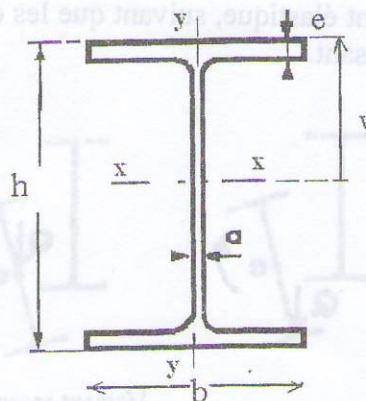
41. Vérification selon les règles CM66

L'étude du flambement par la méthode de Dutheil, basée sur la prise en compte de la valeur d'une flèche représentative de l'influence des imperfections des barres réelles, a été généralisée au cas du déversement. Cette généralisation a permis d'établir des règles applicables aux poutres comportant une section constante en I bis symétrique, qui peuvent se déverser, c'est-à-dire pour lesquelles aucune liaison ne s'oppose à une déformation latérale. Au droit des appuis, la section transversale de la poutre est supposée ne pas pouvoir tourner (bloquée en rotation) autour de l'axe longitudinal zz .

Les règles sont données pour les trois cas suivants :

- cas des poutres symétriquement appuyées et symétriquement chargées,
- cas des poutres soumises à deux moments différents au droit des appuis,
- cas des poutres en console (encastrement parfait à une extrémité, libre de l'autre).

On désigne par :



A : aire de la section de la poutre,

h ($h = 2v$) : hauteur de la section,

b et e : largeur et épaisseur de chaque semelle,

I_x : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe fort Gx ,

I_y : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe faible Gy ,

J : Moment d'inertie de torsion (voir CM66 Annexe § 13 601),

l_0 : Longueur entre appuis de la poutre,

l (l_f) : longueur de flambement latéral de la semelle comprimée supposée isolée du reste de la poutre,

B : coefficient dépendant du niveau d'application des charges de flexion,

C : coefficient dépendant de la répartition longitudinale des charges de flexion,

D : coefficient dépendant des dimensions de la poutre

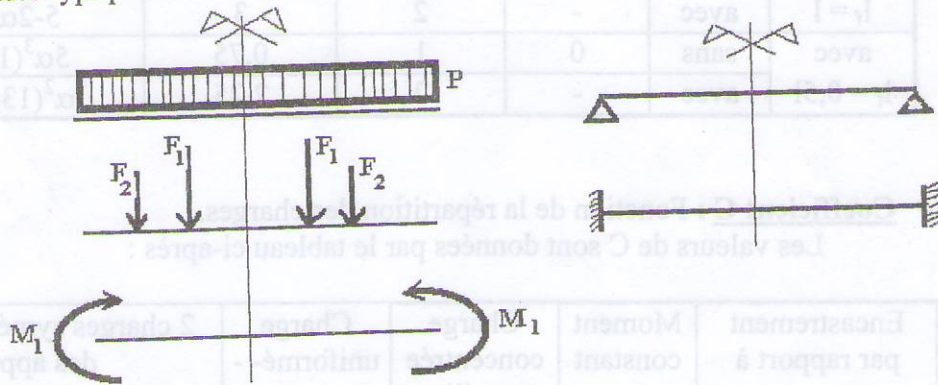
σ_e : Résistance limite d'élasticité de l'acier constitutif de la poutre,

σ_f : Valeur maximale de la contrainte pondérée de flexion simple engendrée dans la poutre par les charges appliquées,
 σ_d : Contrainte de non déversement,
 λ_0 : élancement de la semelle en milieu élastique
 k_0 : coefficient de flambement en milieu élastique,
 k_d : coefficient de déversement

La vérification de la condition de résistance et stabilité au déversement des 3 cas de poutres fléchies citées plus haut, s'effectue selon les procédures décrites ci après.

a. Cas des poutres symétriquement appuyées et symétriquement chargées

Exemples typiques de ce cas:



Méthode :

- Vérifier la semelle comprimée, supposée isolée, comme une barre comprimée
 - Si la semelle satisfait à la condition de résistance, cela signifie qu'elle est stable vis-à-vis du flambement latéral et on conclue que la poutre ne peut déverser. La vérification de la poutre revient à celle d'une poutre en flexion simple, comme traitée au chapitre précédent.
 - Sinon, cela signifie que la semelle comprimée et isolée est instable vis-à-vis du flambement latéral. On ne peut pas conclure et il faut donc poursuivre la procédure de vérification.
- Calculer les coefficients B, C, D :

Coefficient D : Fonction des dimensions de la pièce.

Il est donné par l'expression simplifiée:

$$D = \sqrt{1 + 0,156 \frac{J}{I_y} \frac{l_f^2}{h^2}}$$

Coefficient B : Fonction du niveau d'application des charges.

Il a pour expression :

$$B = \sqrt{1 + \left(\frac{y_a}{h} \frac{8\beta C}{\pi^2 D} \right)^2} - \frac{y_a}{h} \frac{8\beta C}{\pi^2 D}$$

Avec y_a distance du centre de gravité de la section au point d'application de la charge.

Si, par exemple, les charges de flexion sont orientées de haut vers le bas,
 $y_a > 0$ si le point d'application de la charge est au-dessus du centre de gravité.
 $y_a = 0$ si le point d'application est confondue avec le centre de gravité.
 $y_a < 0$ si le point d'application est en dessous du centre de gravité.

Paramètre β : les valeurs de β sont données dans le tableau ci-après :

Encastrement par rapport à		Moment constant	Charge concentrée au milieu	Charge uniformément répartie	2 charges symétriques à c des appuis $\alpha = c/l_f$
G_y	G_x				
sans	sans	0	1	1	$6\alpha - 8\alpha^2$
$l_f = 1$	avec	-	2	3	$5 - 2\alpha - 8\alpha^2$
avec	sans	0	1	0,75	$5\alpha^3(1,2 - \alpha)$
$l_f = 0,51$	avec	-	2	2,25	$\alpha^2(13 - 11\alpha)$

Coefficient C : Fonction de la répartition des charges.

Les valeurs de C sont données par le tableau ci-après :

Encastrement par rapport à		Moment constant	Charge concentrée au milieu	Charge uniformément répartie	2 charges symétriques à c des appuis $\alpha = c/l_f$
G_x	G_y				
sans	sans	1	1,365	1,132	$1 + 2,92\alpha^3$
$l_f = 1$	avec	-	0,938	0,576	$0,1 + 1,2\alpha + 1,9\alpha^3$
avec	sans	1	1,070	0,972	$1 + \alpha^3(\alpha - 0,93)$
$l_f = 0,51$	avec	-	0,633	0,425	$0,181 + 0,307\alpha + (\alpha - 0,474)^3$

3. Calculer la contrainte de non déversement :

$$\sigma_d = 40\,000 \frac{I_y}{I_x} \frac{h}{l_f^2} (D - 1) BC$$

- Si on a : $\sigma_d \geq \sigma_e$, la poutre est stable et donc, il n'y a pas lieu de vérifier la stabilité au déversement. La vérification de la poutre revient à celle d'une poutre en flexion simple, comme traitée au chapitre précédent.

Il est par ailleurs possible de tenir compte des possibilités d'adaptation plastique si on a : $\sigma_d \geq \psi \sigma_e$.

- Si on a : $\sigma_d < \sigma_e$, il faut poursuivre la procédure.

4. Déterminer un élanement :

$$\lambda_0 = \frac{l_f}{h} \sqrt{\frac{4}{BC} \frac{I_x}{I_y} \left(1 - \frac{\sigma_d}{\sigma_e} \right)}$$

5. Déduire un coefficient de flambement k_0 (à partir de $\sigma_k = \pi^2 E/(\lambda_0)^2$ comme celui correspondant aux les barres comprimées.
(Voir chapitre: barres comprimées –flambement simple).

6. Déterminer le coefficient de déversement :

$$k_d = \frac{k_0}{1 + \frac{\sigma_d}{\sigma_e} (k_0 - 1)}$$

Le coefficient k_d doit être toujours supérieur ou égal à 1 ($k_d \geq 1$)

7. Pour une poutre fléchie sensible au déversement, la contrainte caractéristique prend la valeur ci après : $\sigma = k_d \sigma_f$ La condition de résistance et stabilité à vérifier pour cette poutre est donc donnée par la relation suivante :

$$k_d \sigma_f \leq \sigma_e$$

σ_e Résistance limite d'élasticité du matériau de la poutre.

σ_f Contrainte maximale pondérée de flexion.

8. Vérifier la condition de déformation de la poutre.

$$f_{\text{calculée}} \leq f_{\text{admissible.}}$$

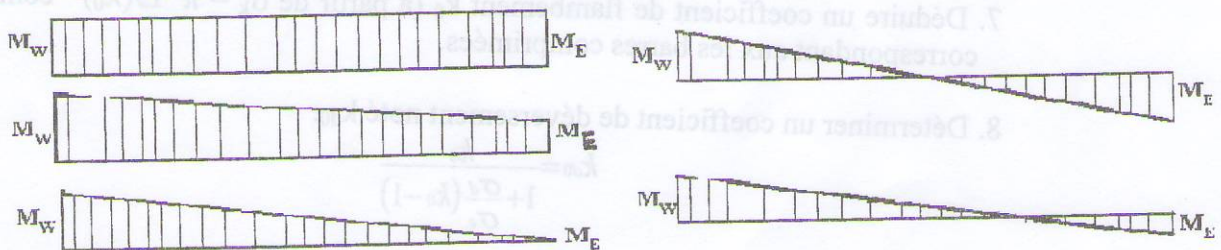
Remarque: La poutre est admise si et seulement si les 2 conditions précédentes sont conjointement satisfaites.

b. Cas des poutres soumises à deux moments différents au droit des appuis

Ce cas résulte, en général, de charges directes mais dissymétriques ou quand la poutre fait partie d'une structure chargée horizontalement (vent ou séisme).

On désigne le moment fléchissant le plus élevé en valeur absolue par M_w , le moment à l'autre extrémité étant désigné par M_e .

Exemples typiques :



Méthode :

1. Déterminer la contrainte de flexion maximale pondérée σ_f en fonction du moment le plus élevé en valeur absolue M_w .
2. Vérifier la semelle comprimée, supposée isolée, comme une barre comprimée.
 - Si la semelle satisfait à la condition de résistance, cela signifie qu'elle est stable vis-à-vis du flambement latéral et on conclue que la poutre ne peut déverser.

La vérification de la poutre revient à celle d'une poutre en flexion simple, comme traitée au chapitre précédent.

- Sinon, cela signifie que la semelle comprimée et isolée est instable vis-à-vis du flambement latéral. On ne peut pas conclure et il faut donc poursuivre la procédure de vérification.

3. Lorsque les semelles sont libres de tourner par rapport à Gy au droit des appuis, déterminer comme précédemment k_{d0} mais qui serait valable pour la même poutre soumise à un moment constant sur toute sa longueur ($l_f = l_0$) avec les valeurs suivantes pour les coefficients C et B.

$$C = 1$$

$$B = 1$$

4. Calculer, comme précédemment, le coefficient D.

$$D = \sqrt{1 + 0,156 \frac{J}{I_y} \frac{l_f^2}{h^2}}$$

5. Calculer, comme précédemment la contrainte de non déversement

$$\sigma_d = 40000 \frac{I_y h}{I_x l_f^2} (D-1) BC$$

- Si on a : $\sigma_d \geq \sigma_e$, il n'y a pas lieu de vérifier la stabilité au déversement. La vérification de la poutre revient à celle d'une poutre en flexion simple.
- Si on a : $\sigma_d < \sigma_e$, il faut poursuivre la procédure.

6. Déterminer un élancement :

$$\lambda_0 = \frac{l_f}{h} \sqrt{\frac{4}{BC} \frac{I_x}{I_y} \left(1 - \frac{\sigma_d}{\sigma_e}\right)}$$

7. Déduire un coefficient de flambement k_0 (à partir de $\sigma_k = \pi^2 E / (\lambda_0)^2$ comme celui correspondant aux les barres comprimées.

8. Déterminer un coefficient de déversement noté k_{d0} :

$$k_{d0} = \frac{k_0}{1 + \frac{\sigma_d}{\sigma_e} (k_0 - 1)}$$

9. Calculer le coefficient C

On détermine C, correspondant au rapport des moments aux extrémités (M_e / M_w) et en prenant ces moments avec leur signe respectif, avec la relation suivante.

$$C = \sqrt{\frac{3}{1 + \mu + \mu^2 - 0,152(1 - \mu)^2}}$$

Avec : $\mu = (M_e / M_w)$

- si $\mu = +1$ ($M_e = M_w$) $C = 1$
- si $\mu = 0$ ($M_e = 0$) $C = 1,88$
- si $\mu = -1$ ($M_e = -M_w$) $C = 2,77$

10. Déterminer le coefficient de déversement:

$$k_d = \frac{k_{d0}}{C} + \frac{C-1}{5k_{d0}} \geq 1$$

Le coefficient k_d doit être toujours ≥ 1 .

11. Vérifier la condition de résistance et stabilité de la poutre, comme précédemment, avec la relation suivante :

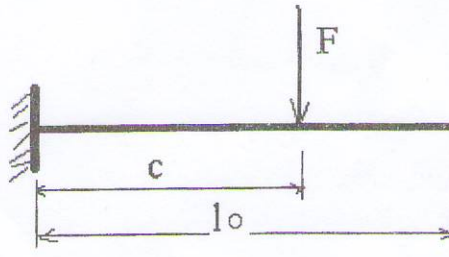
$$k_d \sigma_f \leq \sigma_e$$

12. Vérifier la condition de déformation de la poutre.

$$f_{\text{calculée}} \leq f_{\text{admissible}}$$

Conclusion : La poutre est admise si et seulement si les 2 conditions précédentes sont conjointement satisfaites.

c. Cas des poutres en console parfaitement encastrées



Méthode :

1. Déterminer la contrainte de flexion maximale pondérée σ_f . Le calcul de σ_f se fera avec le moment d'encastrement parfait de la console.

2. Vérifier la semelle comprimée, supposée isolée, comme une barre comprimée, en prenant comme longueur de flambement $l_f = 2 l_0$

- Si la semelle satisfait à la condition de résistance, cela signifie qu'elle est stable vis-à-vis du flambement latéral et on conclue que la console ne peut pas déverser.

La vérification de la poutre revient à celle d'une poutre en flexion simple.

- Sinon, cela signifie que la semelle comprimée et isolée est instable. On ne peut pas conclure et il faut donc poursuivre la procédure de vérification.

3. Calculer le coefficient C

- Charge concentrée à l'extrémité $C = 2,77$;
 - Charge uniformément répartie $C = 4,93$;
 - Charge à une distance c de l'encastrement $C = (\alpha') + (0,19 \alpha'^2)$.
- Avec $\alpha' = l_f / c$

4. Calculer le coefficient de déversement:

- Si les charges sont appliquées au niveau du centre de gravité

$$k_d = 0,1 + 2,2 \frac{l_f}{1000 C} \frac{h}{b.e} \frac{\sigma_e}{24}$$

Avec σ_e : en $[\text{daN/mm}^2]$.

k_d , toujours ≥ 1 .

- Si les charges sont appliquées au niveau de la semelle supérieure, on remplace dans la formule précédente l_f par $l_f + 0,375 \cdot C \cdot h \cdot (b/e)$

- Si les charges sont appliquées au niveau de la semelle inférieure, on remplace dans la formule précédente l_f par $l_f - 0,375 \cdot C \cdot h \cdot (b/e)$

5. Vérifier la condition de résistance et stabilité de la console, comme précédemment, avec la relation suivante :

$$k_d \sigma_f \leq \sigma_e$$

6. Vérifier la condition de déformation de la console.

f calculée $\leq f$ admissible.

Remarque: La poutre est admise si et seulement si les 2 conditions précédentes sont conjointement satisfaites.

